Analiză Matematică II (Integrabilitate)
— Notiţe de curs —

(câteva noţiuni elementare pentru viitorii ingineri)

Conf. Univ. Dr. Maria-Magdalena Boureanu

Cuprins

CAPITOLUL 1

Integrale Riemann pe dreapta reală. Integrale improprii

Considerăm cunoscute din liceu definiţia şi principalele proprietăţi ale integralelor Riemann de pe dreapta reală, astfel că în cele ce urmează vom face doar o foarte scurtă recapitulare a anumitor proprietăţi şi definiţii. În plus, vom aminti două tipuri de aplicaţii în viaţa reală ale acestor integrale şi vom introduce o nouă noţiune – aceea de integrale improprii.

Definiţia 1. *Fie $J \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : J \to \mathbb{R}$. Spunem că f admite primitivă pe J dacă există $F : J \to \mathbb{R}$ derivabilă pe J astfel încât $F' = f$. În acest caz spunem că F este primitiva funcţiei f.*

Observaţie. *Dacă f admite o primitivă F, atunci ea admite o infinitiate de primitive de forma $F + c$, unde c reprezintă o constantă reală.*

Reamintim din liceu următoarele formule.

Primitive ale unor funcţii elementare

1. $\displaystyle\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathcal{C}$, aricare ar fi $\alpha \neq -1$.
   Consecinţă: $\displaystyle\int dx = x + \mathcal{C}$.
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + \mathcal{C}$.
3. $\displaystyle\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C}$. Consecinţă: $\displaystyle\int e^x\, dx = e^x + \mathcal{C}$.
4. $\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x + \mathcal{C}$.
5. $\displaystyle\int \cos x\, dx = \sin x + \mathcal{C}$.

6. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + \mathcal{C}.$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + \mathcal{C}.$
8. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + \mathcal{C}.$
9. $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + \mathcal{C}.$
10. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + \mathcal{C}.$
11. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + \mathcal{C}.$
12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \mathcal{C}.$
13. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + \mathcal{C}.$
14. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + \mathcal{C}.$

Teorema 1. *(Formula Leibniz-Newton)*
Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă care admite primitive. Atunci oricare ar fi F o primitivă a lui f pe $[a,b]$, avem

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Exemple:

1. $\displaystyle\int_0^2 \left(3^x + 3x^3\right)\,dx = \left.\frac{3^x}{\ln 3}\right|_0^2 + \left.\frac{3x^4}{4}\right|_0^2 = \frac{3^2}{\ln 3} - \frac{3^0}{\ln 3} + \frac{3\cdot 2^4}{4} - \frac{3\cdot 0^4}{4} =$
$\displaystyle= \frac{8}{\ln 3} + 12.$
2. $\displaystyle\int_{-1}^4 \frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)\Big|_{-1}^4 = \ln\left(4+\sqrt{21}\right) - \ln\left(-1+\sqrt{6}\right) =$
$\displaystyle= \ln\left(\frac{4+\sqrt{21}}{-1+\sqrt{6}}\right).$

Aplicaţii ale integralelor Riemann pe dreapta reală

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $[a, b]$. Atunci:

1. aria domeniului $D \subset \mathbb{R}^2$ mărginit de graficul funcţiei f, axa Ox, şi dreptele de ecuaţii $x = a$ şi $x = b$, este dată de formula
$$\mathcal{A}(D) = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$
Exemplu: Dacă $f(x) = x$, atunci, calculând aria subgraficului funcţiei f mărginite de axa Ox şi de dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = c > 0$, regăsim formula ariei unui triunghi dreptunghic isoscel cu catetele de lungime c:
$$\mathcal{A}_{\triangle} = \int_0^c |x|\, dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^c = \frac{c^2}{2}.$$
2. volumul corpului $D \subset \mathbb{R}^3$ obţinut prin rotirea graficului funcţiei f în jurul axei Ox este dat de formula
$$\mathcal{V}(D) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$
Exemplu: Dacă $f; [0, h] \to \mathbb{R}$, $f(x) = r > 0$, atunci, calculând volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei f în jurul axei Ox, regăsim formula volumului unui cilindru circular drept de rază r şi înălţime h:
$$\mathcal{V}_{\text{cilindru}} = \pi \int_0^h r^2\, dx = \pi r^2 x\Big|_0^h = \pi r^2 h.$$

Revenind cu discuţia la calculul integralelor Riemann, trebuie spus că, spre deosebire de ceea ce s-a învăţat în liceu, aici vom întâlni şi situaţii în care intervalul de integrare este nemărginit.

Definiţia 2. *Integralele pentru care intervalul de integrare este nemărginit se numesc integrale improprii în raport cu intervalul (sau integrale improprii de speţa a întâi).*

Aceste integrale se rezolvă în mod obişnuit doar că atunci când unul dintre capetele intervalului este nemărginit vom calcula limita în capătul respectiv. Dacă această limită nu există sau nu este finită, funcţia nu este integrabilă pe intervalul respectiv.

Ne putem întâlni cu unul dintre următoarele cazuri.

1. $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty;\,b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$

Exemple:

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^2 5x^4\,dx = \lim_{a\to-\infty} x^5\Big|_a^2 = 2^5 - \lim_{a\to-\infty} a^5 = +\infty$. Prin urmare funcţia f dată de expresia $f(x) = 5x^4$ nu este integrabilă pe intervalul $(-\infty, 2)$. (Spunem că integrala sa este divergentă pe acest interval.)
2. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} =$ $= \dfrac{\pi}{4}$. Prin urmare funcţia f dată de expresia $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ este integrabilă pe intervalul $(1,\infty)$. (Spunem că integrala sa este convergentă pe acest interval.)

De asemenea, ne putem întâlni şi cu situaţia în care integrandul (adică funcţia ce se doreşte a fi integrată) este nemărginit pe intervalul de integrare.

Definiţia 3. *Integralele pentru care integrandul este nemărginit pe intervalul de integrare se numesc integrale improprii în raport cu funcţia (sau integrale improprii de speţa a doua).*

De această dată vom utiliza limitele laterale. Ne putem întâlni cu unul dintre următoarele cazuri.

1. Dacă f nu este definită în a, atunci $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a;\,t>a}\int_t^b f(x)\,dx.$
2. Dacă f nu este definită în b, atunci $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b;\,t<b}\int_a^t f(x)\,dx.$

Exemplu: $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to0;\,t>0} \ln|x|\Big|_t^4 = \ln 4 - \lim_{t\to0;\,t>0}\ln t = 4 + \infty =$ $= +\infty$. Aşadar această integrală este divergentă.

Dacă se întâmplă ca într-un interval să apară mai multe puncte din acestea în care funcţia nu este definită, vom ajunge la unul dintre cele două cazuri expuse mai sus folosind proprietatea de aditivitate a integralei:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

unde $c \in [a, b]$.

Să recapitulăm acum câteva dintre tehnicile de calcul al integralelor.

Teorema 2. *(Formula de integrare prin părţi)*
Fie f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile cu derivate integrabile. Atunci

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Aplicaţii: Calculaţi:

1. $\displaystyle\int_1^2 xe^x\,dx;$
2. $\displaystyle\int_1^3 \ln x\,dx;$
3. $\displaystyle\int_{\frac{-\pi}{6}}^0 x^2\cos x\,dx.$

Teorema 3. *(Prima formulă de schimbare de variabilă)*
Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$, $\varphi \in C^1[\alpha, \beta]$. Atunci

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt.$$

Aplicaţii: Calculaţi:

1. $\displaystyle\int_{-3}^2 e^{3x}\,dx;$
2. $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x^2+1)\,dx;$
3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x+3}.$

4. $\displaystyle\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 2}\, dx.$

Trecem acum la integrarea funcţiilor raţionale.

DEFINIŢIA 4. *Fie $J \subset \mathbb{R}$ un interval. O funcţie $f : J \to \mathbb{R}$ se numeşte raţională dacă şi numai dacă există P, $Q \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, oricare ar fi $x \in J$.*

Un rol special este jucat de funcţiile raţionale simple, încadrate în următoarele trei categorii:

a) $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, unde $a_k \in \mathbb{R}$, oricare ar fi k, $n \in \mathbb{N}$. Avem $\displaystyle\int_b^c f(x)\, dx = \left(a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_b^c.$

b) $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^n}$, unde $n \in \mathbb{N}^\star$, $a \in \mathbb{R}$. Avem de tratat două situaţii.
Dacă $n \geq 2$, $\displaystyle\int_b^c f(x)\, dx = \int_b^c (x-a)^{-n}(x-a)'\, dx = \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}\Bigg|_b^c.$
Dacă $n = 1$, $\displaystyle\int_b^c f(x)\, dx = \ln|x-a|\Big|_b^c.$

c) $f(x) = \dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, unde $n \in \mathbb{N}^\star$, A, B, p, $q \in \mathbb{R}$, iar $p^2 - 4q < 0$. Pentru calculul integralelor din acest tip de funcţii se utilizează forma canonică a ecuaţiei de gradul II, adică faptul că $x^2 + px + q = (x + p/2)^2 - \Delta/4$.

Celelalte funcţii raţionale pot fi descompuse în funcţii raţionale simple. Vom arăta cum poate fi descompusă în funcţii raţionale simple o funcţie de forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ în care $\text{grad}(P(x)) < \text{grad}(Q(x))$. Cazul în care $\text{grad}(P(x)) \geq \text{grad}(Q(x))$ se reduce la cazul anterior aplicând teorema împărţirii cu rest:

$$\text{dacă } P(x) : Q(x) = L(x) \text{ rest } R(x),$$

atunci

$$P(x) = Q(x) \cdot L(x) + R(x),$$

deci

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

cu $\mathrm{grad}(R(x)) < \mathrm{grad}(Q(x))$.

Teorema 4. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$, o funcţie raţională, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, cu grad$(P(x)) <$ grad$(Q(x))$. Dacă descompunerea lui Q în factori ireductibili peste $\mathbb{R}[X]$ este*

$$Q(x) = (x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\dots(x-a_k)^{n_k}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\dots(x^2+p_lx+q_l)^{m_l},$$

unde n_i, p_j, $q_j \in \mathbb{R}$, cu $i \in \{1, \dots, k\}$, $j \in \{1, \dots, l\}$, atunci

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{A_i^1}{x-a_i} + \frac{A_i^2}{(x-a_i)^2} + \dots + \frac{A_i^{n_i}}{(x-a_i)^{n_i}}\right) +$$

$$+\sum_{j=1}^{l}\left(\frac{B_j^1x + C_j^1}{x^2+p_jx+q_j} + \frac{B_j^2x + C_j^2}{(x^2+p_jx+q_j)^2} + \dots + \frac{B_j^{m_j}x + C_j^{m_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{m_j}}\right)$$

iar coeficienţii care apar la numărător se determină prin metoda identificării coeficienţilor de la polinoame egale.

Exemplu: $f(x) = \dfrac{x^4+4}{x(x-5)^3(x^2+x+1)^2} =$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-5} + \frac{C}{(x-5)^2} + \frac{D}{(x-5)^3} + \frac{Ex+F}{x^2+x+1} + \frac{Gx+H}{(x^2+x+1)^2}.$$

Aplicaţii: Calculaţi:

1. $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{4}{x^3+4x^2+4x}\,dx$;
2. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{(x^2+3)(x+1)}\,dx$.

Încheiem recapitularea metodelor studiate în liceu cu a doua schimbare de variabilă.

TEOREMA 5. *(A doua schimbare de variabilă)*
Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă şi $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$, bijectivă, derivabilă şi cu derivata nenulă. Atunci

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

Trebuie precizat că nu există o regulă general valabilă de alegere a funcţiei φ. Cu toate acestea, anumite cazuri sunt standard, şi prezentăm două astfel de cazuri.

1. $\displaystyle\int_b^c R(a^x)\,dx$, unde R este o funcţie raţională.

   Metodă de rezolvare: Se efectuează schimbarea de variabilă $a^x = t$, de unde se obţine că $x = \log_a t = \varphi(t)$.

2. $\displaystyle\int_b^c R(\sqrt[k_1]{x}, \sqrt[k_2]{x}, \ldots, \sqrt[k_n]{x})\,dx$, unde R este o funcţie raţională.

   Metodă de rezolvare: Se calculează cel mai mic multiplu comun al ordinelor radicalilor, $m = [k_1, k_2, \ldots, k_n]$, şi apoi se efectuează schimbarea de variabilă $\sqrt[m]{x} = t$, de unde se obţine că $x = t^m = \varphi(t)$.

Aplicaţii: Calculaţi:

1. $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{5 - 6e^x}$;
2. $\displaystyle\int_0^{16} \frac{\sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt{x}}\,dx$.

CAPITOLUL 2

Integrale simple cu parametru

DEFINIŢIA 5. *Fie* $A \subseteq \mathbb{R}$ *şi* $f : A \times [a,b] \to \mathbb{R}$ *o funcţie cu proprietatea că, pentru fiecare* $x \in A$, *funcţia* $t \longrightarrow f(x,t)$ *este integrabilă pe* $[a,b]$. *Funcţia* $F : A \to \mathbb{R}$ *definită prin* $F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$ *se numeşte integrală cu parametru (parametrul fiind* x*).*

TEOREMA 6. *Fie* $A \subseteq \mathbb{R}$ *un interval şi* $f : A \times [a,b] \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă pe* $A \times [a,b]$. *Atunci funcţia* $F : A \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$, *este continuă pe* A.

TEOREMA 7. *Fie* $A \subseteq \mathbb{R}$ *un interval şi* $f : A \times [a,b] \to \mathbb{R}$. *Dacă* f *este continuă pe* $A \times [a,b]$ *şi admite derivată parţială în raport cu* x *care este continuă pe* $A \times [a,b]$, *atunci funcţia* $F : A \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$, *este derivabilă pe* A *şi derivata sa este dată de*

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt,$$

această derivată fiind şi continuă pe A.

Algoritm de calculare a integralelor cu parametru

Pentru a calcula $\int_a^b f(x,t)\,dt$ parcurgem următoarele etape:

I notăm $F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$ şi arătăm că f este continuă pe $A \times [a,b]$;

II calculăm $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ si arătăm că este continuă pe $A \times [a,b]$;

III calculăm $F'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$;

IV determinăm primitivele lui F', găsind funcţia F după condiţiile impuse de problemă.

Teorema 8. *(Teorema lui Fubini)*
Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ *un interval şi* $f : A \times [a, b] \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă pe* $A \times [a, b]$*. Atunci funcţia* $F : A \to \mathbb{R}$*,* $F(x) = \int_a^b f(x, t)\, dt$*, este integrabilă pe orice interval compact* $[\alpha, \beta] \subset A$ *şi avem*

$$\int_\alpha^\beta F(x)\, dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x, t)\, dx \right) dt.$$

De fapt, Teorema lui Fubini ne spune că

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x, t)\, dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x, t)\, dx \right) dt,$$

adică, dacă f este continuă, se poate inversa ordinea în care integrăm.

Exerciţii pentru fixarea noţiunilor nou introduse

1. Calculaţi primitivele:

$$a)\ \int \left(\frac{1}{x^2+5} + \cos x \right) dx;$$

$$b)\ \int \left(x^{-3} + \frac{1}{3-x^2} \right) dx;$$

$$c)\ \int \left(\frac{8}{\sqrt{7-x^2}} + 14x^{-1} \right) dx;$$

$$d)\ \int \left(\frac{1}{2x^2-3} + 4\operatorname{ctg} x \right) dx;$$

$$e)\ \int \frac{1}{\sqrt{6x^2-8}}\, dx.$$

2. Calculaţi următoarele integrale improprii şi specificaţi dacă sunt convergente:

$$a)\ \int_{-1}^{\infty} \left(-2x^2+5x-3 \right) dx;$$

$$b)\ \int_{-\infty}^{0} \frac{-7}{4x^2+2}\, dx;$$

$$c)\ \int_{0}^{2} \frac{x^8-3x^5+x-11}{x}\, dx;$$

$$d)\ \int_{5}^{6} \frac{1}{x-6}\, dx;$$

3. Calculaţi

$$a)\ \int_{-1}^{0} (3x+16)\, e^x\, dx;$$

$$b)\ \int_{-3}^{0} x \sin x\, dx;$$

$$c)\ \int_{1}^{e} x \ln^2 x\, dx;$$

$$d)\ \int_{0}^{3} e^{10x} \cos x\, dx;$$

$e)$ $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{2x-3}\,dx;$

$f)$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{16}} \sin(8x)\,dx;$

$g)$ $\displaystyle\int_{-1}^2 x^2 5^{x^3-4}\,dx;$

$h)$ $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{(5x-9)^3}\,dx;$

$i)$ $\displaystyle\int_3^6 \frac{x+3}{x^2+6x-3}\,dx;$

$j)$ $\displaystyle\int_3^6 \frac{dx}{x^2+6x-3};$

$k)$ $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{dx}{x^2+x+2}.$

4. Calculaţi

$a)$ $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x+2}{(x-1)^3}\,dx;$

$b)$ $\displaystyle\int_2^3 \frac{x+5}{(x+1)^7}\,dx;$

$c)$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{4-x^2}\,dx;$

$d)$ $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2+x};$

$e)$ $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^3+5x}\,dx;$

$f)$ $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{(2x^2+7)(x-1)}\,dx.$

5. Calculaţi

$a)$ $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx;$

b) $\displaystyle\int_{16}^{81} \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{x}-1}\,dx;$

c) $\displaystyle\int_{0}^{9} \frac{x+1}{\sqrt{x}+1}\,dx;$

d) $\displaystyle\int_{7}^{26} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}};$

e) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{5^x}{5^x+5}\,dx;$

f) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{1+e^{3x}};$

g) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{3-2e^{x}};$

h) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{3^{2x}}{4\cdot 3^x+2}\,dx.$

6. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x,t)\,dt$, unde $x \in \left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$, iar $f(x,t) = \ln\dfrac{(1+xt)(2-t)}{(1-xt)(2+t)}$.

CAPITOLUL 3

Integrale multiple

În cele ce urmează ne ocupăm de calculul integralelor duble, pentru funcţii de două variabile, şi de integrale triple, pentru funcţii de trei variabile.

DEFINIŢIA 6. *Spunem că mulţimea $D \subset \mathbb{R}^N$ este conexă dacă nu există două mulţimi deschise disjuncte M_1, $M_2 \in \mathbb{R}^N$ astfel încât $D \subseteq M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap D \neq \emptyset$ şi $M_2 \cap D \neq \emptyset$. O mulţime deschisă şi conexă se numeşte domeniu. Un domeniu închis şi mărginit se numeşte domeniu compact.*

Fie $D \subset \mathbb{R}^N$ un domeniu compact. Principalele proprietăţi care erau valabile în cazul integralelor simple rămân valabile pentru integralele multiple.

PROPRIETATEA 1. *Dacă f este continuă pe D, atunci f este integrabilă pe D.*

PROPRIETATEA 2. *(Proprietatea de liniaritate)*
Fie α, $\beta \in \mathbb{R}$ şi f, $g : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

(i) *Dacă $N = 2$ atunci*

$$\iint\limits_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\, dxdy = \alpha \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \beta \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

(ii) *Dacă $N = 3$ atunci*

$$\iiint\limits_D (\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z))\, dxdydz =$$

$$= \alpha \iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz + \beta \iiint\limits_D g(x,y,z)dxdydz.$$

PROPRIETATEA 3. *(Proprietatea de aditivitate a domeniului)* *Fie* $f : D = D_1 \cup D_2 \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

(i) *Dacă* $N = 2$ *atunci*

$$\iint\limits_{D=D_1\cup D_2} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy.$$

(ii) *Dacă* $N = 3$ *atunci*

$$\iiint\limits_{D=D_1\cup D_2} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{D_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_{D_2} f(x,y,z)\,dxdydz.$$

PROPRIETATEA 4. *(Proprietatea de monotonie)* *Fie* $f,\, g : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

(i) *Dacă* $N = 2$ *şi* $f(x,y) \le g(x,y)$ *oricare ar fi* $(x,y) \in D$, *atunci*

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy \le \iint\limits_{D} g(x,y)\,dxdy.$$

(ii) *Dacă* $N = 3$ *şi* $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$ *oricare ar fi* $(x,y,z) \in D$, *atunci*

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)\,dxdydz \le \iiint\limits_{D} g(x,y,z)\,dxdydz.$$

PROPRIETATEA 5. *Fie* $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

(i) *Dacă* $N = 2$ *atunci*

$$\left|\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy\right| \le \iint\limits_{D} |f(x,y)|\,dxdy.$$

(ii) *Dacă* $N = 3$ *atunci*

$$\left|\iiint\limits_{D} f(x,y,z)\,dxdydz\right| \le \iiint\limits_{D} |f(x,y,z)|\,dxdydz.$$

De asemenea, o observaţie importantă este aceea că

$$\iint_D dxdy = \text{aria domeniului } D,$$

iar

$$\iiint_D dxdydz = \text{volumul domeniului } D.$$

1. Calculul integralelor duble

Considerăm $D = [a,b] \times [c,d]$, deci D este un domeniu dreptunghiular şi $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$. Vom gândi ca la derivarea parţială, adică atunci când integrăm în raport cu x, îl tratăm pe y ca şi cum ar fi constantă, iar când integrăm în raport cu y, îl tratăm pe x ca şi cum ar fi constantă.

Exemplu: Fie $D = [-1,1] \times [0,2]$ şi $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 3xy^2 - 2$. Atunci

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)dxdy &= \int_0^2 \left[\int_{-1}^1 \left(3xy^2 - 2\right)\, dx\right] dy \\
&= \int_0^2 \left(3y^2 \int_{-1}^1 x\, dx - 2\int_{-1}^1 dx\right) dy \\
&= \int_0^2 \left(\frac{3x^2y^2}{2}\Big|_{x=-1}^{x=1} - 2x\Big|_{x=-1}^{x=1}\right) dy \\
&= \int_0^2 (-4)\, dy = -4y\Big|_{y=0}^{y=2} \\
&= -8.
\end{aligned}$$

Fie $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. După cum am văzut din Teorema lui Fubini (Teorema 8), dacă f este continuă, atunci ordinea de integrare nu contează:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\, dx\right] dy.$$

Constatăm că are loc această proprietate pe exemplul anterior, în care funcţia $f(x,y) = 3xy^2 - 2$ este continuă pe $D = [-1,1] \times [0,2]$:

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(x,y)dxdy &= \int_{-1}^{1}\left[\int_0^2 (3xy^2-2)\,dy\right]dx\\ &= \int_{-1}^{1}\left(xy^3-2y\right)\Big|_{y=0}^{y=2} dx = \int_{-1}^{1}(8x-4)\,dx\\ &= -8.\end{aligned}$$

Dat fiind că la funcţii continue nu contează, ordinea de integrare se alege astfel încât calculul să fie mai uşor (numai când avem de-a face cu astfel de funcţii).

Ne referim acum la situaţia în care domeniul D nu este dreptunghic. În această situaţie recurgem la **schimbarea de variabilă**. Mai exact, facem trecerea de la (x, y) la (u, v) printr-o transformare punctuală T care duce (u, v) în (x, y):

$$\begin{cases} x = & x(u,v)\\ y = & y(u,v)\end{cases}$$

astfel încât $T(D^*) = D$, unde D^* reprezintă noul domeniu. Prin urmare vom avea

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv,$$

unde $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ reprezintă Jacobianul acestei transformări, adică,

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v)\\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v)\end{vmatrix}.$$

Atragem atenţia asupra faptului că acest D folosit în notaţia asociată Jacobianului nu are nicio legătură cu domeniul D. De asemenea, să reţinem că în schimbarea de variabilă Jacobianul este în modul.

Constatăm că determinarea transformării T este vitală. Din nefericire, nu există nici aici o alegere universal valabilă pentru T, ci va trebui să ne orientăm după ecuaţiile care definesc frontiera domeniului D. O transformare uzuală este următoarea.

Transformarea în coordonate polare

După cum ştim, de multe ori, pentru a determina poziţia exactă a unui punct M situat în plan, fixăm un reper cartezian xOy şi folosim abscisa şi ordonata lui M, prin urmare avem $M(x, y)$. O altă modalitate de a stabili poziţia lui M în reperul cartezian xOy este folosind lungimea segmentului OM şi unghiul făcut de acesta cu axa Ox (în viaţa reală se ajunge deseori la o anumită destinaţie folosind o busolă şi măsurând distanţa parcursă). Aşadar, dacă notăm $OM = r$, şi notăm cu θ unghiul făcut de OM cu axa Ox, putem face legătura între (x, y) şi (r, θ) cu ajutorul funcţiilor trigonometrice:

$$\sin\theta = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuză}} = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{ipotenuză}} = \frac{x}{r}.$$

În consecinţă, transformarea

$$\begin{cases} x = & x(r, \theta) \\ y = & y(r, \theta) \end{cases}$$

este dată în mod concret de ecuaţiile

$$\begin{cases} x = & r\cos\theta \\ y = & r\sin\theta. \end{cases}$$

Jacobianul acestei transformări este

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r}(r, \theta) & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \dfrac{\partial y}{\partial r}(r, \theta) & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}(r, \theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Exemplu: Calculaţi $\iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$, unde D reprezintă discul limitat de cercul $\mathcal{C}(A(1, 2), 2)$. Reamintim că ecuaţia unui cerc de centru $A(x_A, y_A)$ şi rază r, notat $\mathcal{C}(A(x_A, y_A), r)$, este

$$\mathcal{C}(A(x_A, y_A), r) : \, (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2.$$

De aceea, în cazul domeniului nostru avem

$$\mathcal{C}(A(1, 2), 2) : \, (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2^2.$$

Este clar că pentru a calcula această integrală este necesară trecerea la coordonate polare. Însă observăm că centrul cercului nu este situat în centrul sistemului cartezian de coordonate xOy, deci ese necesar să facem o translaţie, ceea ce implică trecerea la coordonate polare sub următoarea formă:

$$\begin{cases} x-1= & r\cos\theta \\ y-2= & r\sin\theta, \end{cases}$$

unde $r \in [0,2]$, $\theta \in [0,2\pi]$, deci $D^* = [0,2] \times [0,2\pi]$ (fără această transformare nu ne putem descurca cu D deoarece nu putem diviza integrala dublă în două integrale simple). Ajungem la

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left[(r\cos\theta+1)^2 + (r\sin\theta+2)^2 \right] r\, d\theta \right) dr$$

care se rezolvă în mod obişnuit deoarece noul domeniu de integrare D^* este un domeniu dreptunghiular.

De remarcat faptul că D poate fi un semidisc, caz în care, când trecem la coordonate polare, $\theta \in [0,\pi]$, sau $\theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}+\pi\right]$, etc. De asemenea, putem avea domenii care reprezintă un sfert de disc, 2/3 dintr-un disc etc.

2. Calculul integralelor triple

Integralele triple se tratează în mod similar celor duble. Considerăm $D = [a,b] \times [c,d] \times [\alpha,\beta]$, deci D este un domeniu paralelipipedic. Fie $f : [a,b] \times [c,d] \times [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. La fel ca la integralele duble, vom folosi faptul că, dacă f este continuă, atunci nu contează ordinea de integrare.

Exemplu: Fie $D = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \times [0,3] \times [1,e]$ şi $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \dfrac{y\cos x}{z}$. Calculaţi $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$.

În situaţia în care domeniul D nu este paralelipipedic recurgem la **schimbarea de variabilă** făcând trecerea de la (x,y,z) la (u,v,w) printr-o transformare punctuală T care duce (u,v,w) în (x,y,z) prin

$$\begin{cases} x= & x(u,v,w) \\ y= & y(u,v,w) \\ z= & z(u,v,w) \end{cases}$$

astfel încât $T(D^*) = D$, unde D^* reprezintă noul domeniu. Vom avea

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{D^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \right| dudvdw,$$

unde $\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ reprezintă Jacobianul acestei transformări, adică,

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v,w) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v,w) & \dfrac{\partial x}{\partial w}(u,v,w) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v,w) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v,w) & \dfrac{\partial y}{\partial w}(u,v,w) \\ \dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v,w) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u,v,w) & \dfrac{\partial z}{\partial w}(u,v,w). \end{vmatrix}.$$

Din nou, nu există nici aici o alegere universal valabilă pentru T, astfel că ne orientăm după ecuaţiile care definesc frontiera domeniului D. O transformare uzuală este următoarea.

Transformarea în coordonate cilindrice

Dacă suntem în spaţiu, cu un reper cartezian $Oxyz$ fixat, un punct M este unic determinat de coordonatele sale (x,y,z), unde $x = \text{pr}_{Ox}M$, $y = \text{pr}_{Oy}M$, $z = \text{pr}_{Oz}M$. O altă modalitate de a stabili poziţia lui M în reperul cartezian $Oxyz$ este folosind lungimea segmentului $OM' = r$, unde $OM' = \text{pr}_{xOy}OM$, unghiul θ făcut de OM' cu axa Ox şi $z = \text{pr}_{Oz}M$. Cu ajutorul funcţiilor trigonometrice, transformarea

$$\begin{cases} x = & x(r,\theta,z) \\ y = & y(r,\theta,z) \\ z = & z(r,\theta,z) \end{cases}$$

este dată în mod concret de ecuaţiile

$$\begin{cases} x = & r\cos\theta \\ y = & r\sin\theta \\ z = & z. \end{cases}$$

Jacobianul acestei transformări este

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta,z) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta,z) & \frac{\partial x}{\partial z}(r,\theta,z) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta,z) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta,z) & \frac{\partial y}{\partial z}(r,\theta,z) \\ \frac{\partial z}{\partial r}(r,\theta,z) & \frac{\partial z}{\partial \theta}(r,\theta,z) & \frac{\partial z}{\partial z}(r,\theta,z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Exerciţii pentru fixarea noţiunilor nou introduse

1. Calculaţi $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, unde:
   a) $D = [0,6] \times [0,1]$ şi $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{xy}}{x+2}$;
   b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, x \in [-2,1], \, y \in [0,\pi]\}$ şi $f(x,y) = x\cos y - y^2 e^x$;
   c) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, 0 \le x \le 1; \, 0 \le y \le 1\}$ şi $f(x,y) = \dfrac{y}{1+xy}$;
   d) D reprezintă discul limitat de cercul $\mathcal{C}(A(2,-3),3)$ şi $f(x,y) = 3x - 8y$;
   e) D reprezintă un sfertul de disc din cel de-al doilea cadran al cercului $\mathcal{C}(A(5,5),1)$ şi $f(x,y) = xy$.

2. Calculaţi $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$, unde:
   a) $D = [-1,4] \times [-2,0] \times [1,3]$ şi $f(x,y,z) = 1$. Se poate determina valoarea acestei integrale fără a utiliza calculul integral?
   b) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, x \in [1,2], \, y \in [0, 2\sqrt{2}], \, z \in [1,e]\}$ şi $f(x,y,z) = \dfrac{4^x}{z(2-y^2)}$;

c) D reprezintă discul cilindrul circular drept care are ca bază cercul $\mathcal{C}(A(-4,-1),3)$ şi generatoarea de lungime 2, iar $f(x,y,z) = x + y^2 + z^4$.

CAPITOLUL 4

Integrala curbilinie de primul tip (de speţa întâi)

DEFINIŢIA 7. *Orice funcţie continuă* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$, *cu* a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *se numeşte drum în* $\mathbb{R}^N$, *iar* $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ *reprezintă capetele drumului* γ. *Dacă* $\gamma(a) = \gamma(b)$, *atunci spunem că* γ *este drum închis.*

Dacă $\gamma = (f_1, f_2, \ldots, f_N)$, atunci egalităţile

$$\begin{cases} f_1(t) = & x_1 \\ f_2(t) = & x_2 \\ \quad . & \\ \quad . & \\ \quad . & \\ f_N(t) = & x_N \end{cases}$$

se numesc ecuaţii parametrice ale drumului γ, iar

$$(\gamma) = \{f_1(t), f_2(t), \ldots, f_N(t))|\, t \in [a, b]\}$$

se numeşte imaginea drumului γ sau traiectoria drumului γ.

DEFINIŢIA 8. *Un drum* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ *se numeşte neted dacă* $\gamma \in C^1$ *şi* $\gamma'(t) \neq 0$, *oricare ar fi* $t \in [a, b]$.

De exemplu, drumul $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ este un drum neted şi închis, de ecuaţii parametrice

$$\begin{cases} \cos t = & x \\ \sin t = & y \end{cases}$$

care are ca traiectorie cercul trigonometric $x^2+y^2 = 1$. De asemenea, dacă vom considera drumul $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$, atunci acesta are ca traiectorie cercul centrat în origine de rază r: $x^2 + y^2 = r^2$. Dacă vrem să gândim acest cerc în dimensiunea 3, avem $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, 0)$, deci ecuaţiile sale parametrice sunt

$$\begin{cases} \cos t = & x \\ \sin t = & y \\ \quad 0 = & z. \end{cases}$$

DEFINIŢIA 9. *Două drumuri* $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ *şi* $\gamma_2 : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^N$ *se numesc echivalente dacă există* $h : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ *bijectivă, continuă, cu inversa continuă, astfel încât* $\gamma_1(t) = \gamma_2(h(t))$, *oricare ar fi* $t \in [a,b]$.

DEFINIŢIA 10. *Se numeşte curbă în* $\mathbb{R}^N$ *orice clasă de drumuri echivalente din* $\mathbb{R}^N$. *Dacă drumurile dintr-o curbă sunt netede, atunci curba se numeşte curbă netedă.*

PROPRIETATEA 6. *Toate drumurile care aparţin unei curbe netede au aceeaşi lungime, iar aceasta se numeşte lungimea curbei.*

În cele ce urmează, vom nota cu γ fie un drum, fie o curba generată de acesta.

DEFINIŢIA 11. *Fie* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *o curbă netedă de ecuaţii*

$$\begin{cases} f(t) = & x \\ g(t) = & y \end{cases}$$

şi fie F *o funcţie continuă (deci integrabilă) pe un domeniu ce conţine imaginea lui* γ. *Atunci integrala curbilinie de primul tip (sau de speţa întâi) a lui* F *de-a lungul lui* γ *este dată de formula*

$$\int\limits_\gamma F(x,y)\,dl = \int_a^b F((f(t),g(t))\sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\,dt.$$

În mod similar, pentru o curbă netedă $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ *dată de ecuaţiile parametrice*

$$\begin{cases} f(t) = & x \\ g(t) = & y \\ h(t) = & z, \end{cases}$$

definim integrala curbilinie de primul tip (sau de speţa întâi) a lui F *de-a lungul lui* γ *prin formula*

$$\int\limits_\gamma F(x,y,z)\,dl = \int_a^b F((f(t),g(t),h(t))\sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2}\,dt.$$

De reţinut că atunci când calculăm o integrală curbilinie de primul tip nu contează sensul de parcurgere al lui γ. De asemenea, dacă γ este dat de o ecuaţie de tipul $y = \tilde{f}(x)$, putem nota $x = t$ pentru a obţine o parametrizare a curbei γ.

Aplicaţii ale integralei curbilinii de primul tip

1. **Lungimea unei curbe:** curba reprezentată de drumul neted $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ are lungimea $l_\gamma = \int\limits_\gamma dl$.
2. **Masa unui fir material:** dacă imaginea (γ) a drumului neted $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ modelează un fir material, iar $\rho : (\gamma) \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă care asociază fiecărui punct $(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in (\gamma)$ densitatea $\rho(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ a firului în acel punct, atunci masa firului este $m = \int\limits_\gamma \rho(x_1, x_2, \ldots, x_N)\, dl$.

Exemple:

1. Pentru $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (r\cos t,\ r\sin t)$ calculând lungimea curbei reprezentate de γ regăsim formula de lungime a cercului de rază r. Într-adevăr, ţinând cont că ecuaţiile parametrice ale acestui drum sunt

$$\begin{cases} r\cos t = & x \\ r\sin t = & y, \end{cases}$$

deci

$$f(t) = r\cos t, \qquad g(t) = r\sin t,$$

avem

$$l_\gamma = \int\limits_\gamma dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}\, dt = rt\Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 2\pi r = l_{\mathcal{C}(O(0,0),1)}.$$

2. Să se calculeze masa unui fir material cu densitatea $\rho(x, y, z) = xyz + 5$, modelat de imaginea unei curbe $\gamma : [1, 2] \to \mathbb{R}^3$, care este dată prin ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x = & 2t \\ y = & -t + 1 \\ z = & 1 - 2t. \end{cases}$$

CAPITOLUL 5

Integrala de suprafaţă de primul tip (de speţa întâi)

DEFINIŢIA 12. *Orice funcţie de clasă* C^1, $S : D \to \mathbb{R}^3$, *unde* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *este un domeniu (mulţime deschisă şi conexă) se numeşte pânză netedă. Dacă matricea Jacobiană asociată lui* S *are rangul doi în orice punct al domeniului* D, *atunci* S *se numeşte pânză netedă nesingulară.*

$S(D)$ reprezintă imaginea pânzei S.

DEFINIŢIA 13. *Spunem că două pânze* $S_1 : D_1 \to \mathbb{R}^3$ *şi* $S_2 : D_2 \to \mathbb{R}^3$ *sunt echivalente dacă şi numai dacă există o aplicaţie* $T : D_1 \to D_2$ *bijectivă, de clasă* C^1, *cu inversa de clasă* C^1, *astfel încât Jacobianul asociat lui* T *să fie strict pozitiv în fiecare punct din* D_1, *iar* $S_1 = S_2 \circ T$.

DEFINIŢIA 14. *O clasă de pânze netede nesingulare se numeşte suprafaţă netedă, iar imaginea unei suprafeţe reprezintă imaginea unei pânze din clasa respectivă de echivalenţă.*

TEOREMA 9. *Fie* $\Phi : V \to \mathbb{R}$ *(*V *fiind un domeniu care conţine imaginea lui* S*) o funcţie continuă (deci şi integrabilă), unde* S *este o suprafaţă netedă.*

(i) *Dacă* S *este dată de ecuaţiile parametrice*

$$\begin{cases} x = & x(u,v) \\ y = & y(u,v) \\ z = & z(u,v), \end{cases}$$

unde $(u,v) \in D$, *atunci integrala de suprafaţă de primul tip (sau de speţa întâi) a funcţiei* Φ *pe* S *este dată de*

$$\iint\limits_S \Phi(x,y,z)dS =$$

$$= \iint\limits_D \Phi(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{A^2(u,v) + B^2(u,v) + C^2(u,v)}dudv,$$

unde

$$A(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix},$$

$$B(u,v) = \frac{D(x,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial z}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix},$$

$$C(u,v) = \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial z}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}.$$

(ii) *Dacă S este dată explicit de ecuaţia*

$$z = f(x,y), \quad \textit{unde } (x,y) \in D,$$

atunci integrala de suprafaţă de primul tip (sau de speţa întâi) a funcţiei Φ pe S este dată de

$$\iint_S \Phi(x,y,z)dS =$$

$$= \iint_D \Phi(x,y,f(x,y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy.$$

Aplicaţii ale integralei curbilinii de primul tip

1. **Aria unei suprafeţe:** aria suprafaţei $S : D \to \mathbb{R}^3$ este $\mathcal{A}_S = \iint_S dS$.

2. **Masa unei suprafeţe:** dacă funcţia de integrat Φ repezintă densitatea materialului din care este confecţionată suprafaţa S, atunci integrala de suprafaţă de primul tip a funcţiei Φ pe S reprezintă masa suprafeţei S.

Exemplu: Ţinând cont că o sferă centrată în origine şi de rază R este dată de ecuaţia $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, şi că ea se parametrizează astfel:

$$\begin{cases} x = & R\cos\varphi\sin\theta \\ y = & R\sin\varphi\sin\theta \\ z = & R\cos\theta, \end{cases}$$

cu $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$, putem ”recupera” formula ariei sferei folosind integrala de suprafaţă de primul tip a funcţiei $\Phi \equiv 1$ pe sferă. Mai exact,

$$\mathcal{A}_S = \iint\limits_S dS = \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{A^2(\varphi,\theta) + B^2(\varphi,\theta) + C^2(\varphi,\theta)} d\varphi \right) d\theta,$$

unde

$$A(\varphi,\theta) = \frac{D(x,y)}{D(\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi}(\varphi,\theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(\varphi,\theta) \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi}(\varphi,\theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(\varphi,\theta) \end{vmatrix},$$

$$B(\varphi,\theta) = \frac{D(x,z)}{D(\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi}(\varphi,\theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(\varphi,\theta) \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi}(\varphi,\theta) & \frac{\partial z}{\partial \theta}(\varphi,\theta) \end{vmatrix},$$

$$C(\varphi,\theta) = \frac{D(y,z)}{D(\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \varphi}(\varphi,\theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(\varphi,\theta) \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi}(\varphi,\theta) & \frac{\partial z}{\partial \theta}(\varphi,\theta) \end{vmatrix},$$

iar

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi}(\varphi,\theta) = -R\sin\varphi\sin\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta}(\varphi,\theta) = R\cos\varphi\cos\theta,$$
$$\frac{\partial y}{\partial \varphi}(\varphi,\theta) = R\cos\varphi\sin\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta}(\varphi,\theta) = R\sin\varphi\cos\theta,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta}(\varphi, \theta) = -R \sin \theta.$$

Prin urmare,

$$A(\varphi, \theta) = \begin{vmatrix} -R \sin \varphi \sin \theta & R \cos \varphi \cos \theta \\ \\ R \cos \varphi \sin \theta & R \sin \varphi \cos \theta \end{vmatrix} = -R^2 \sin \theta \cos \theta,$$

$$B(\varphi, \theta) = \begin{vmatrix} -R \sin \varphi \sin \theta & -R \cos \varphi \cos \theta \\ \\ 0 & -R \sin \theta \end{vmatrix} = R^2 \sin \varphi \sin^2 \theta,$$

$$C(\varphi, \theta) = \begin{vmatrix} R \cos \varphi \sin \theta & R \sin \varphi \cos \theta \\ \\ 0 & -R \sin \theta \end{vmatrix} = -R^2 \cos \varphi \sin^2 \theta,$$

de unde obţinem că

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_S &= \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{R^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + R^4 \sin^2 \varphi \sin^4 \theta + R^4 \cos^2 \varphi \sin^4 \theta d\varphi} \right) d\theta, \\ &= \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{R^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + R^4 \sin^4 \theta}\, d\varphi \right) d\theta, \\ &= \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} R^2 |\sin \theta|\, d\varphi \right) d\theta = \int_0^{\pi} \left(R^2 \sin \theta\, \varphi \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \right) d\theta, \\ &= -2\pi\, R^2 \cos \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 4\pi\, R^2. \end{aligned}$$

Menţionăm că în calculele de mai sus s-a folosit formula fundamentală a trigonometriei: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ şi faptul că funcţia sin este pozitivă pe $[0, \pi]$.

Exerciţii pentru fixarea noţiunilor nou introduse

1. Să se calculeze lungimea curbei $\gamma : [-1, 2] \to \mathbb{R}^2$ date de ecuaţiile parametrice
$$\begin{cases} x = & 3t \\ y = & t + 2 \end{cases}$$
În plus, ştiind că densitatea firului de material modelat de (γ) este dată de funcţia $\rho(x, y) = x^2 - 7y + 1$, calculaţi masa acestui fir de material.

2. Să se calculeze $\int\limits_{\gamma} (x + 2y + 3z)\, dl$, unde $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos t,\, \sin t,\, t)$.

3. Să se calculeze $\int\limits_{\gamma} xy\, dl$, unde γ este dată de ecuaţia $y = 2x^2$, cu $x \in [-3, 3]$. *(Indiciu: notăm $x = t$. De asemenea, reamintim că dacă f este funcţie pară, atunci $\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = 2 \int_0^a f(t)\, dt$, iar dacă f este funcţie impară, atunci $\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = 0$.)*

4. Să se calculeze $\iint\limits_{S} (2z + 3) dS$ unde S este dată parametric prin
$$\begin{cases} x = & 2u \cos v \\ y = & -2u \sin v \\ z = & 3u, \end{cases}$$
unde $u \in [0, 1]$, $v \in [0, \pi]$.

5. Să se calculeze aria unei suprafeţe S date de ecuaţia $z = x + 4y$, $(x, y) \in [1, 2] \times [0, 2]$. În plus, ştiind că densitatea materialului din care este confecţionată suprafaţa este $\rho(x, y, z) = y^3 + 3xy + 2z^2$, să se calculeze masa acestei suprafeţe.