TRANDAFIR T. BĂLAN CRISTIAN – P. DĂNEŢ

ECUAŢII DIFERENŢIALE

Breviar teoretic şi probleme

EDITURA SITECH
Craiova, 2007

Editura SITECH din Craiova este acreditată de C.N.C.S.I.S. din cadrul Ministerului Educaţiei şi Cercetării pentru editare de carte ştiinţifică.

Editura SITECH Craiova
Str. Romul, Bloc T1, Parter
Tel/fax: 0251/414003
E-mail: sitech@rdslink.ro

ISBN 978-973-746-531-3

Prefaţă

Cartea de faţa se adresează studenţilor din învaţamântul tehnic - inginerie, fizică, chimie, etc. care au în programa de învaţamânt capitolul de Ecuaţii diferenţiale şi este rodul activităţii didactice a autorilor la disciplinele de Ecuaţii diferenţiale şi Matematici speciale la specializările Automatică, Calculatoare şi Electronică de la Universitatea din Craiova.

Prin modul de organizare al materialului, am ţinut cont de tendinţa actuală de reducere a numărului de ore alocate disciplinelor de matematică la majoritatea specializărilor. În acest sens, am prezentat succint partea teoretică, reţinând doar definiţiile şi proprietăţile direct utilizate în rezolvările concrete. Problemele sunt însoţite de indicaţii, care le fac - sperăm - accesibile tuturor studenţilor.

Cu excepţia unor cunoştinţe de Analiză matematică, prezenta carte este autoconţinută, astfel încât, chiar dacă pe parcursul semestrului studenţii nu pot detalia toate aspectele, ea să poată constitui un ghid în înţelegerea altor discipline de specialitate, sau chiar în activitatea postuniversitară.

Autorii

Craiova, martie 2007

CUPRINS

CAPITOLUL I

ECUAŢII DIFERENŢIALE DE ORDINUL ÎNTÂI

§ I.1. Noţiuni fundamentale

Ecuaţiile diferenţiale apar în scrierea unor legi ale naturii, în procesul de modelare a sistemelor netede, în studiul unor familii de curbe şi suprafeţe, etc., atunci când sunt implicate funcţii împreună cu derivatele acestora.

Se numeşte ***ecuaţie diferenţială*** *orice condiţie, de obicei o egalitate (neidentic verificată) care se exprimă cu ajutorul derivatelor uneia sau mai multor funcţii. Dacă într-o ecuaţie diferenţială apar numai derivatele totale ale funcţiilor respective în raport cu o singură variabilă, spunem că ecuaţia este o* ***ecuaţie diferenţială ordinară****.*

Ordinul maxim al derivatelor ce apar într-o ecuaţie diferenţială se numeşte ***ordinul ecuaţiei****.*

Orice funcţie ce verifică o ecuaţie diferenţială dată se numeşte ***soluţie*** *a ecuaţiei. Soluţia care conţine numărul maxim posibil de constante arbitrare (de obicei egal cu ordinul ecuaţiei) se numeşte* ***soluţie generală*** *a ecuaţiei. Orice soluţie care se obţine din soluţia generală a ecuaţiei prin particularizarea constantelor se numeşte* ***soluţie particulară****. Soluţiile care nu pot fi obţinute din soluţia generală prin particularizarea constantelor se numesc* ***soluţii singulare****.*

Se numeşte ***problemă a lui Cauchy*** *problema de a determina acea soluţie a unei ecuaţii diferenţiale care să satisfacă condiţiile iniţiale date.*

Dacă este cunoscută soluţia generală a unei ecuaţii diferen-ţiale, problema lui Cauchy se reduce la identificarea constantelor încât din soluţia generală să se obţină soluţia particulară căutată. Soluţiile singulare sunt de obicei înfăşurători sau asimptote ale familiei de curbe ce reprezintă soluţia generală.

Dacă familia de curbe plane $\{\gamma_C : C \in I\}$*, de ecuaţie* $\Phi(x, y, C) = 0$*, soluţii ale unei ecuaţii diferenţiale de* ordinul *întâi, explicite sau implicite, are o înfăşurătoare, atunci această înfăşurătoare va fi de asemenea soluţie a acestei ecuaţii.*

Pentru calculul înfăşurătorii familiei de curbe $\{\gamma_C : C \in I \subseteq \mathrm{IR}\}$ se elimină C între ecuaţia $\Phi(x, y, C) = 0$, a familiei, şi $\Phi'_C\ (x, y, C) = 0$. Calculul asimptotelor se face ca la reprezentările grafice în analiză, având grijă ca asimptota să fie aceeaşi pentru toate curbele familiei, adică să nu depindă de *C*.

Probleme § I.1.

1. *Se consideră familia de cercuri cu centrul pe axa* 0*x în plan, şi de rază* 1. *Să se scrie ecuaţia diferenţială care are drept soluţie generală această familie de curbe. Să se verifice că fiecare cerc este o soluţie a ecuaţiei obţinute. Ce fel de soluţie este* $y = 1$ *şi cum se poate obţine din familia de cercuri* ? *Să se formuleze şi să se rezolve câteva probleme Cauchy.*

Indicaţie. Se scrie ecuaţia cercului cu centrul în (*a*,0) şi rază 1**:** $(x - a)^2 + y^2 = 1$**.** Se derivează considerând $y = y(x)$ şi se elimină *a* între ecuaţia cercurilor şi derivată. Dreapta $y = 1$ este o soluţie singulară care se obţine ca o înfăşurătoare a familiei de cercuri.

2. S*ă se integreze ecuaţia de dezintegrare a unei substanţe radioactive studiind câmpul de direcţii. Există soluţii singulare şi ce poziţie au faţă de curbele ce definesc soluţia generală* ?

Indicaţie. Dacă notăm cu *t* variabila independentă – timp, şi cu $y(t)$ funcţia de determinat – cantitatea de substanţă la momentul *t*, legea enunţată se scrie $y' = -k\,y$, $(y \geq 0, k > 0)$. Reprezentând câmpul de direcţii, acesta sugerează soluţii de tipul exponenţialei.

3. *Să se arate că funcţiile*

$$y = Ce^{x} - x - 1$$

reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $y' = x + y$. *Să se studieze dacă familia acestor curbe admite o înfăşurătoare sau o asimptotă şi să se verifice dacă acestea furnizează soluţii singulare. Să se găsească soluţia pentru care* $y(0) = 1$ *şi să se scrie aproximaţia liniară a acestei soluţii folosind câmpul de direcţii ataşat ecuaţiei***.**

Indicaţie. Se verifică faptul că pentru orice *C* funcţia dată verifică ecuaţia, şi reciproc, orice soluţie am considera, ea se poate obţine prin particularizarea constantei *C*.

[redacted]**.** *Să se determine pentru ecuaţia*

$$y' = 2x - y$$

locul geometric al punctelor pentru care tangentele la curbele ce reprezintă soluţia generală au aceeaşi înclinaţie, în particular 0°, 45°, -45°*, faţă de direcţia* O*x* (*aceste locuri geometrice se numesc* ***izocline***)**.** *Să se găsească locul geometric al punctelor de inflexiune pentru curbele ce reprezintă soluţia generală***.** *Ce fel de soluţie este* $y_0 = 2x - 2$? *Să se schiţeze câmpul de direcţii***.**

Indicaţie. Scriind $y' = k =$constant, obţinem pentru izocline ecuaţiile $y = 2x - k$, ceea ce arată că acestea sunt drepte paralele.

În particular $k = 0$, $k = 1$ şi $k = -1$. Punctele de inflexiune sunt date de condiţia $y'' = 0$.

Se consideră o familie de curbe depinzând de un parametru:

$$a)\ \ y=kx \quad ,\ b)\ \ xy=k \quad ,\ c)\ \ \frac{x^2}{k^2}+y^2=1.$$

Să se scrie ecuaţia diferenţială a familiei de curbe ce formează cu curbele date un unghi fixat, α .

Cazuri particulare: α = 90^0*, α* = 45^0.

Indicaţie. Dacă $F(x,y,k)=0$, este ecuaţia familiei date, scriem mai întâi ecuaţia diferenţială a familiei respective, care se obţine prin eliminarea parametrului *k* între $F=0$ şi $F_k^{/}=0$.

Două puncte P_1, P_2 *de aceeaşi masă m se mişcă, fără frecare, pe axele* Ox_1 *şi respectiv* Ox_2 *ale unui sistem de axe regulare* x_1Ox_2 *şi se atrag reciproc cu o forţă de mărime f*(*r*), *unde r reprezintă distanţa între* P_1 *şi* P_2 . *Presupunând că cele două puncte pornesc din repaus şi că f este mereu nenulă, să se arate că ele ajung în originea* O *în acelaşi timp, oricare ar fi poziţiile lor iniţiale* (x_1^0,0), (0,x_2^0) cu $x_1^0\neq 0$, $x_2^0\neq 0$.

Indicaţie. Fără a restrânge generalitatea se poate presupune că $x_1^0>0$, $x_2^0>0$. Notăm cu $x_1=x_1(t)$ abscisa punctului P_1 şi cu $x_2=x_2(t)$ ordonata punctului P_2 . Forţa cu care este atras punctul P_1 de către P_2 este

$$\overline{F}_{1,2} = f(r)\frac{-x_1\overline{i}+x_2\overline{j}}{r}, \quad r=\sqrt{x_1^2+x_2^2},$$

unde $\overline{i}$, $\overline{j}$ sunt versorii axelor de coordonate. Comform legii lui Newton avem ecuaţia de mişcare $mx_1^{//}=-f(r)\frac{x_1}{r}$.

La fel, pornind de la forţa $\overline{F}_{2,1}=-\overline{F}_{1,2}$, cu care este atras P_2 către P_1 , pentru cel de al doilea punct obţinem ecuaţia

$$mx_2^{//}=-f(r)\frac{x_2}{r}.$$

Combinând cele două ecuaţii, obţinem relaţia $\left(x_1 x_2' - x_1' x_2\right)' = 0$. Rezultă astfel $x_1 x_2' - x_1' x_2 =$ constant = 0, de unde rezultă $\frac{d}{dt}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = 0$.

Astfel se obţine relaţia $x_2(t) = \frac{x_2^0}{x_1^0} x_1(t)$, care ne arată că $x_1(t)$ şi $x_2(t)$ se anulează simultan, adică P_1 şi P_2 ating simultan originea.

§ I.2. Ecuaţii cu variabile separabile

Fie $f:(a,b)\to \mathrm{IR}$ *o funcţie continuă. Ecuaţia*

$$\frac{dy}{dx}=f(x) \qquad (1)$$

se va numi ***ecuaţie cu derivata explicitată ca funcţie de variabila independentă.***

Rezolvarea acestor ecuaţii se bazează pe *teorema fundamentală a calculului integral* (vezi [N-D-M], [PM], etc.):

Soluţia generală a ecuaţiei (1) *este*

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt+C \qquad (1^{/})$$

unde $x_0\in(a,b)$ *este un punct fixat, iar* $C\in\mathrm{IR}$ *este o constantă arbitrară. Soluţii singulare nu există.*

Ecuaţia diferenţială de forma

$$y^{/}=g(y), \qquad (2)$$

unde $g:[\alpha,\beta]\to\mathrm{IR}$ *este o funcţie continuă, care nu se anulează pe* (α,β)*, se numeşte* ***ecuaţie cu derivata explicitată ca funcţie de funcţia necunoscută.***

Rezolvarea acestor ecuaţii se bazează următoarea teoremă:

O condiţie necesară şi suficientă ca funcţia $\varphi:\mathrm{IR}\to(\alpha,\beta)$ *să fie soluţie pentru ecuaţia diferenţială* (2) *şi să verifice condiţia Cauchy* $y_0=\varphi(x_0)$, *cu* $y_0\in(\alpha,\beta)$, *este ca ea să fie soluţie a ecuaţiei*

$$x=x_0+\int_{y_0}^{\varphi(x)}\frac{dt}{g(t)} \quad . \qquad (2^{/})$$

Dacă $g(\alpha)=0$*, atunci funcţia constantă* $y=\alpha$ *este soluţie singulară (şi la fel, dacă* $g(\beta)=0$*, atunci* $y=\beta$ *este soluţie singulară).*

Numim ***ecuaţie cu variabile separabile*** *orice ecuaţie diferenţială de forma*

$$y' = f(x)\,g(y)\ , \tag{3}$$

unde $f:(a,b)\to \mathrm{IR}$ *şi* $g:[\alpha,\beta]\to \mathrm{IR}$ *sunt funcţii continue, iar* g *nu se anulează pe* (α,β).

Pentru rezolvare avem: *O condiţie necesară şi suficientă ca funcţia* $\varphi:(a,b)\to(\alpha,\beta)$ *să verifice ecuaţia* (3) *şi condiţia Cauchy* $\varphi(x_0)=y_0$, *unde* $y_0\in(\alpha,\beta)$, *este ca ea să fie soluţie a ecuaţiei*

$$\int_{x_0}^{x} f(u)\,du = \int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{dv}{g(v)} \tag{3'}$$

Dacă $g(\alpha)=0$, *atunci funcţia constantă* $y:(a,b)\to\{\alpha\}$ *este o soluţie singulară.* (*Similar se discută cazul* $g(\beta)=0$).

Metodă practică. Pentru integrarea ecuaţiilor diferenţiale cu variabile separabile se recomandă următorii paşi:

1. <u>Separarea variabilelor</u>, adică scrierea ecuaţiei sub forma
$$f(x)\ d\,x = \frac{d\,y}{g(y)}\quad .$$
2. <u>Aplicarea integralelor</u> şi realizarea cuadraturilor din formula
$$\int f(x)\ d\,x = \int \frac{d\,y}{g(y)} + C\quad .$$
3. <u>Identificarea soluţiilor singulare</u> – funcţii constante care pot fi înfăşurători sau asimptote pentru soluţiile particulare.

Dacă este formulată o problemă Cauchy rămâne să determinăm valoarea corespunzătoare a lui C , iar dacă nu sunt verificate toate ipotezele descompunem domeniul în care este dată ecuaţia în subdomenii de forma $(a,b)\times[\alpha,\beta]$ ca în teoremă.

Numim ***ecuaţie diferenţială omogenă*** *ecuaţia*

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (4)$$

unde $g:[\alpha,\beta]\to \mathrm{IR}$ *este o funcţie continuă pentru care* $g(u)\neq u$ *în toate punctele* $u\in(\alpha,\beta)$.

O condiţie necesară şi suficientă ca $y=\varphi(x)$ *să verifice ecuaţia* (4) *este ca funcţia* $u(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x}$ *să fie soluţie pentru ecuaţia cu variabile separabile*

$$u' = \frac{g(u)-u}{x} \quad . \qquad (4')$$

Soluţiile singulare ale ecuaţiei omogene $(4')$ *sunt semidrepte ce pornesc din origine.*

Metodă practică. Pentru rezolvarea ecuaţiilor omogene este important de reţinut că prin schimbarea funcţiei necunoscute,

$$y \mapsto u = \frac{y}{x} \ ,$$

cu păstrarea variabilei independente x, ecuaţia se transformă într-una cu variabile separabile, care are soluţia de forma $(4')$. Rămâne să identificăm domeniile pe care putem aplica rezultatele teoretice de mai sus şi studiem soluţiile singulare.

Fie $f: I\to \mathrm{IR}$ *o funcţie continuă pe intervalul I al dreptei reale. Ecuaţia diferenţială de forma*

$$y' = f\left(\frac{\alpha x+\beta y+\gamma}{ax+by+c}\right) \qquad (5)$$

se va numi ***ecuaţie cu derivata explicitată ca funcţie de câtul a două expresii de gradul I.*** *Se consideră dreptele* δ *şi* d *, de ecuaţii*

$$\delta:\quad \alpha x+\beta y+\gamma = 0, \textit{ respectiv}$$

$$d:\quad ax+by+c=0$$

Orice ecuaţie de forma (5) se poate reduce la o ecuaţie cu variabilele separabile, şi anume:

Cazul 1. Dacă $\delta \cap d = \{M_0(x_0, y_0)\}$, se face translaţia

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases} . \qquad (5^{/})$$

Cazul 2. Dacă dreptele δ şi *d* sunt paralele, adică

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} \neq \frac{\gamma}{c} ,$$

notăm $\alpha = ka$, $\beta = kb$ şi schimbăm funcţia necunoscută

$$y \mapsto u = ax + by . \qquad (5^{//})$$

cu păstrarea variabilei independente x. Ecuaţia (5) devine

$$u^{/} = a + b\, f\left(\frac{ku + \gamma}{u + c}\right) ,$$

unde s-a ţinut cont că $u^{/} = a + by^{/}$. Această ecuaţie este de tipul (2) – caz particular de ecuaţie cu variabilele separabile.

Probleme § I.2.

■ *Să se integreze ecuaţia*

$$y^{/} = e^{y}$$

studiind şi dacă are soluţii singulare.

Indicaţie. Soluţia generală este $y = -\ln|C - x|$. Domeniul de valori pentru y este toată dreapta reală căci funcţia $g(y) = e^{-y}$ este continuă şi nu se anulează pe IR. Soluţii singulare nu există.

■ *Să se rezolve ecuaţia*

$$y^{/} = ay - by^{2} ,$$

unde a>0 , b>0 .

Indicaţie. Pentru a integra ecuaţia cu variabile separate

$$\frac{dy}{y(a-by)} = dt\ ,$$

descompunem mai întâi în fracţii simple

$$\frac{1}{y(a-by)} = \frac{1}{a}\frac{1}{y} + \frac{b}{a}\frac{1}{a-by}\quad .$$

Se obţine soluţia generală sub forma

$$\frac{1}{a}\ln\left|\frac{y}{a-by}\right| = t + C\quad .$$

■ *Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei*

$$y' = \frac{\sin x}{\sin y}$$

şi să se deducă apoi soluţia particulară care corespunde condiţiei iniţiale $y(0) = \frac{\pi}{2}$, *precizând intervalul pe care aceasta se poate explicita. Să se scrie această soluţie particulară şi prin integrale definite folosind direct condiţiile iniţiale. Există soluţii singulare* ?

Indicaţie. Ecuaţia este cu variabile separabile pe domenii de forma $\mathrm{IR}\times(0,\pi)$, unde $f(x) = \sin x$ şi $g(y) = 1/\sin y$ sunt funcţii continue. Separând variabilele avem $\sin y\,dy = \sin x\,dx$, iar integrând găsim soluţia generală $\cos y = C + \cos x$. Pentru problema lui Cauchy rezultă $C = 1$, astfel că soluţia particulară, în formă explicită, este $y(x) = \arccos(1 + \cos x)$.

■ *Să se rezolve ecuaţia diferenţială*

$$y' = \frac{\sin y}{\sin x}$$

pe un domeniu unde ea este ecuaţie cu variabile separabile. Să se determine soluţia pentru care $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{3}$ *şi să se studieze dacă există soluţii singulare.*

Indicaţie. Ne vom limita, spre exemplu, la benzile $x \in (0, \pi)$, $y \in (0, \pi)$. O primitivă a funcţiei $\dfrac{1}{\sin x}$ este $\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|$, astfel că, în domeniul ales, soluţia generală are forma explicită

$$y_C(x) = 2\operatorname{arctg}(\mathrm{C}\operatorname{tg}\frac{\mathrm{x}}{2}).$$

Soluţia particulară cerută corespunde valorii $C = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = tg\dfrac{\pi}{6}$.

Dreptele $y = 0$ şi $y = \pi$ sunt soluţii singulare, dar nici de tipul asimptotelor (deşi integralele improprii ce intervin sunt divergente) şi nici înfăşurători.

Se consideră ecuaţia diferenţială

$$y' = \frac{x+y}{x}.$$

a) *Să se scrie soluţia generală.*
b) *Să se determine izoclinele.*
c) *Să se studieze soluţiile singulare*

Indicaţie. Ecuaţia este omogenă. Notăm $u = \dfrac{y}{x}$ şi se obţine o ecuaţie cu variabile separabile. Soluţia generală (pe IR^*_+) este

$$y(x) = x(C + \ln x).$$

Izoclinele sunt drepte ce trec prin origine (ca pentru orice ecuaţie omogenă !). Nu există soluţii singulare.

Se consideră ecuaţia

$$xy' = 3y - 2x - 2\sqrt{xy - x^2}.$$

a) *Să se găsească domeniile în care această ecuaţie se poate reduce la una cu variabilele separabile.*

b) *Să se scrie soluţia generală şi să se determine soluţiile singulare.*

c) *Să se rezolve următoarele probleme Cauchy*:

$$y(1)=2\ ;\ y(1)=1\ ;\ y(0)=0\ .$$

Indicaţie. Explicitând pe y' se vede că ecuaţia este omogenă. Condiţiile $xy-x^2\geq 0$ şi $x\neq 0$ ne arată că trebuie să ne situăm fie în $D_1=\{(x,y):x>0, y\geq x\}$, fie în $D_2=\{(x,y):x<0, y\leq x\}$. Deoarece $\ln\left|\sqrt{u-1}-1\right|$ este o primitivă a funcţiei

$$\frac{1}{g(u)-u}=\frac{1}{2\sqrt{u-1}(\sqrt{u-1}-1)},$$

soluţia generală pe D_1 se scrie implicit $Cx=\left|\sqrt{\frac{y}{x}-1}-1\right|$.

Dreapta $y=x$ este soluţie singulară, dar $y=2x$ este o soluţie particulară – cea care satisface prima problemă Cauchy din enunţ, corespunzătoare valorii $C=0$. Prin punctul (1,1) trec două curbe – soluţie, soluţia particulară corespunzătoare lui $C=1$ şi soluţia singulară $y=x$, deci cea de a doua problemă Cauchy are soluţie, dar nu unică. Cea de a treia problemă Cauchy nu are sens.

■ *Considerăm hiperbola xy = 1 şi familia transformatelor sale prin omotetie faţă de origine. Scrieţi ecuaţia diferenţială a acestei familii şi rezolvaţi-o ca ecuaţie omogenă. Generalizare.*

Indicaţie. Ecuaţia familiei de hiperbole este $xy=C$, cu $C>0$. Eliminând pe C prin derivare, se obţine $y+xy'=0$. Ca ecuaţie omogenă ea se scrie $y'=-\frac{y}{x}$ şi trebuie studiată separat în primul şi cel de al treilea cadran. Soluţiile particulare sunt hiperbolele din cadranele respective, iar asimptota $y=0$ este soluţie singulară.

■ *Să se integreze ecuaţia*:

$$y' = \frac{y-2x+1}{x-y+1} \quad .$$

Indicaţie. Suntem în cazul când dreptele sunt concurente. Punctul de intersecţie fiind (2,3), după translaţia originii în acest punct obţinem ecuaţia omogenă

$$u' = \frac{u-2t}{t-u}.$$

Primitivele căutate sunt de forma unor logaritmi.

■ *Să se integreze ecuaţia*:

$$y' = \frac{2x-2y-1}{y-x-1}.$$

Indicaţie. Ecuaţia este de tipul (5), cu dreptele respective paralele. Facem schimbarea de variabile $u = x - y$ şi se obţine o ecuaţie cu variabile separabile.

■ *Să se determine curba care trece prin punctul* $\mathrm{M} = \left(1, \frac{1}{2}\right)$*, ştiind că panta tangentei la curbă în punctul curent este de două ori mai mare decât panta razei vectoare a punctului de tangenţă.*

Indicaţie. Conform enunţului avem $y' = \frac{2y}{x}$. Această ecuaţie diferenţială are soluţia generală $y = C \cdot x^2$. Impunând parabolelor $y = C \cdot x^2$ să treacă prin punctul $\mathrm{M} = \left(1, \frac{1}{2}\right)$, rezultă că $\mathrm{C} = \frac{1}{2}$ şi deci curba căutată este $y = \frac{x^2}{2}$.

■ *Arcul curbei* $y = f(x)$, $f : [a, \infty) \to \mathrm{IR}$ *delimitat de punctele* $(a, f(a))$ şi $(x, f(x))$ *se roteşte în jurul axei* Ox *generând un corp al cărui volum este proporţional cu diferenţa ordonatelor la extremităţile curbei. Să se determine* f.

Indicaţie. Conform enunţului obţinem:

$$\pi \int_0^x f^2(t)dt = k[f(x) - f(a)] \ ,$$

prin derivare ducând la $\pi f^2 = k f'$. Separând variabilele obţinem:

$$\frac{df}{f^2} = \frac{\pi}{k} dx,$$

care integrată conduce la

$$-\frac{1}{f} = \frac{\pi}{k} x + C.$$

În concluzie, curbele căutate sunt hiperbole de ecuaţie**:**

$$f(x) = \frac{1}{C - \frac{\pi}{k} x}.$$

■ *Să se integreze***:**

a) $y' = \dfrac{y^2 + x^2}{xy}$.

b) $xy' - y = (x + y)\ln\dfrac{x + y}{x}$**.**

c) $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$**.**

Indicaţie.

a) Din $\dfrac{y}{x} = z$, z fiind noua funcţie necunoscută, se obţine $2zz' = \dfrac{2}{x}$, deci $z^2 = 2\ln|x| + C$, respectiv $y^2 = 2x^2 \ln|x| + Cx^2$**.**

b) Ecuaţia este echivalentă cu**:** $y' = \dfrac{y}{x} + \left(1 + \dfrac{y}{x}\right)\ln\left(1 + \dfrac{y}{x}\right)$**.**

Cu substituţia $\dfrac{y}{x} = z$ această ecuaţie devine:

$$z' = \frac{1}{x}(1 + z)\ln(1 + z).$$

Rezolvând această ecuaţie şi revenind la substituţie găsim:

$$y = x\left(e^{Cx} - 1\right), \quad C \in \mathrm{IR}.$$

c) Acelaşi procedeu. Se obţine în final:

$\sqrt{x^2+y^2}=C\cdot e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$ (familie de spirale logaritmice)

■ *Să se integreze* **:**

a) $y' = \dfrac{2x-y}{x+2y-5}$.

b) $(3x+3y-1)dx+(x+y+1)dy=0$.

Indicaţie. *a*) Sistemul algebric

$$\begin{cases} 2x_0 - y_0 = 0 \\ x_0 + 2y_0 - 5 = 0 \end{cases}$$

are soluţia $x_0 = 1,\ y_0 = 2$. Cu substituţia

$$\begin{cases} v = y-2 \\ u = x-1 \end{cases}$$

ecuaţia devine

$$\frac{dv}{du} = \frac{2u-v}{u+2v}.$$

În final se găsesc soluţiile ecuaţiei iniţiale care sunt**:**

$$y^2 - x^2 + xy - 5y = C\ , \quad C \in \mathrm{IR}\,.$$

b) Dreptele $3x+3y-1=0$ şi $x+y+1=0$ sunt paralele. De aceea facem schimbarea de funcţie $x+y=u$ şi ecuaţia devine:

$$2dx + du + 2\frac{du}{u-1} = 0.$$

Se obţine în final $(x+y-1)^2 = Ce^{-(3x+y)}$.

■ *Să se integreze ecuaţiile***:**

a) $y' = (y^2+1)(x^2+1)$.

b) $(x^2+a^2)(y^2+b^2)+(x^2-a^2)(y^2-b^2)y' = 0$.

c) $y' = \sqrt{xy}$.

Indicaţie.

a) Se separă variabilele şi se obţine:

$$\frac{dy}{y^2+1}=(x^2+1)dx\,.$$

Integrând ambii membri se obţine soluţia generală

$$\operatorname{arctg} y=\frac{x^3}{3}+x+C \quad \text{sau} \quad y=\operatorname{tg}\left(\frac{x^3}{3}+x+C\right).$$

b) Pentru a separa variabilele, împărţim cu

$$(x^2-a^2)(y^2+b^2)\neq 0$$

şi obţinem

$$\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}dx+\frac{y^2-b^2}{y^2+b^2}dy=0$$

sau

$$dx+dy+2a^2\frac{dx}{x^2-a^2}-2b^2\frac{dy}{y^2+b^2}=0\,.$$

Soluţia generală este:

$$\frac{x+y}{a}+\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|-\frac{2b}{a}\operatorname{arctg}\frac{y}{b}=C_1 \quad \text{sau}$$

$$e^{\frac{x+y}{a}}(x-a)=C(x+a)e^{\frac{2b}{a}\operatorname{arctg}\frac{y}{b}},\quad C=\pm e^{C_1}.$$

§ I.3. Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul I

Se numeşte ***ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întâi*** *, ecuaţia* **:**

$$y' = P(x)y + Q(x), \tag{1}$$

unde P *şi* Q *sunt funcţii continue pe un interval* (a,b)*. Dacă în ecuaţia* (1) *avem* $Q(x) = 0$*, spunem că ecuaţia liniară respectivă este* ***omogenă*** *.*

Fiind dată o ecuaţie liniară (1)*, neomogenă* ($Q \neq 0$) *ecuaţia***:**

$$y' = P(x)y, \tag{2}$$

se numeşte ***ecuaţie liniară omogenă ataşată*** *ecuaţiei* (1).

Orice ecuaţie diferenţială liniară şi omogenă (2) *, este cu variabile separabile şi are soluţia generală***:**

$$y = Ce^{\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt}, \tag{2'}$$

unde x_0 *este un punct arbitrar în intevalul* (a,b).

Metoda variaţiei constantelor (Lagrange). Dacă în locul constantei *C* din formula (2′), care dă soluţia generală a ecuaţiei (2), se pune o funcţie derivabilă *C*(*x*), se poate determina această funcţie astfel încât**:**

$$y_0 = C(x)e^{\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt}$$

să fie o soluţie a ecuaţiei (1)**.**

Soluţia generală a ecuaţiei (1) este

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt}\left[C + \int_{x_0}^{x} Q(s)e^{-\int_{x_0}^{s} P(t)\,dt}\,ds\right]. \tag{1'}$$

Dacă y_1 , y_2 *şi* y_3 *sunt trei soluţii particulare ale ecuaţiei liniare* (1)*, atunci raportul lor simplu este constant, adică* **:**

$$\frac{y_1 - y_2}{y_2 - y_3} = const \text{ .}$$

Ecuaţia diferenţială :

$$y^{/} = P(x)\,y + Q(x)\,y^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathrm{IR} \qquad (3)$$

unde P *şi* Q *sunt funcţii continue pe un interval* (*a*,*b*) *se numeşte* ***ecuaţia lui Bernoulli*** *.*

Pentru a integra o ecuaţie de tip Bernoulli de forma (3) se face schimbarea de funcţie $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$ şi se obţine o ecuaţie diferenţială liniară**.**

Ecuaţia diferenţială

$$y^{/} = P(x)\,y^2 + Q(x)\,y + R(x)\,, \qquad (4)$$

unde P, Q şi R sunt funcţii continue pe un interval (*a*,*b*)*, se numeşte* ***ecuaţia lui Riccati****.*

Ecuaţia de tip Riccati nu se poate integra decât dacă se cunoaşte cel puţin o soluţie particulară**.**

Fie $y = \overline{y}(x)$ *o soluţie particulară a ecauţiei lui Riccati* (4). *O condiţie necesară şi suficientă ca* $y = \varphi(x)$ *să fie soluţie pentru ecuaţia* (4) *este ca funcţia***:** $z(x) = \varphi(x) - \overline{y}(x)$ *să fie soluţie pentru ecuaţia de tip Bernoulli* $z^{/} = [2P\,\overline{y} + Q]z + Pz^2$ **.**

Raportul armonic (*biraportul*) *a patru soluţii arbitrare ale unei ecuaţii Riccati este constant, adică pentru orice patru soluţii* y_1 , y_2 , y_3 *şi* y_4 *avem :*

$$\frac{y_1 - y_2}{y_3 - y_2} : \frac{y_1 - y_4}{y_3 - y_4} = const \text{ .}$$

Metodă practică. Pentru a integra o ecuaţie Riccati se procedează în felul următor**:**

a) Dacă se cunoaşte o soluţie particulară $\overline{y}$, se face schimbarea de funcţie $y = \overline{y} + z$ şi se obţine o ecuaţie Bernoulli în *z*, cu $\alpha = 2$ **.** Dacă se face schimbarea $y = \overline{y} + \frac{1}{u}$ se obţine direct o ecuaţie liniară în u, deci integrarea ecuaţiei (4) se face prin două cuadraturi conform formulei $(1')$.

b) Dacă se cunosc două soluţii particulare y_1 şi y_2 ale ecuaţiei (4), făcând schimbarea de funcţie $z = \dfrac{y - y_1}{y - y_2}$ se obţine o ecuaţie cu variabile separabile în z, iar integrarea se realizează cu o singură cuadratură.

c) Dacă se cunosc trei soluţii particulare pentru ecuaţia (4), soluţia ei generală se scrie fără a efectua cuadraturi, folosind faptul că raportul armonic a patru soluţii arbitrare e constant, anume: $\dfrac{y_1 - y_2}{y_3 - y_2} : \dfrac{y_1 - y}{y_3 - y} = C$.

Probleme § I. 3

Să se rezolve ecuaţia:

$$x\,y' + y - 3x^2 = 0 \qquad (x>0)$$

şi să se găsească soluţia pentru care $y(1) = 1$. *Ce semnificaţie are constanta C în formula* $(1')$ *pentru problema lui Cauchy* ?

Indicaţie. Ecuaţia este liniară (neomogenă) deoarece putem scrie: $y' = -\dfrac{1}{x}y + 3x$.

Soluţia generală este, conform formulei $(1')$,

$$y(x) = \frac{1}{x}(C - 1 + x^3).$$

Pentru condiţia lui Cauchy dată obţinem $C = 1$. Semnificaţia constantei C în formula $(1')$ este întotdeauna :

$$C = y(x_0) = y_0 .$$

Să se arate că ecuaţiile diferenţiale liniare nu pot avea soluţii singulare.

Indicaţie. Fie y o soluţie care nu este de forma $C\,y_1 + y_0$, care este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare. Se constată însă uşor că $y - y_0$ este o soluţie singulară a ecuaţiei omogene ataşate. Ecuaţia omogenă ataşată nu are soluţii singulare deoarece dreapta $y = 0$, care ar putea fi o soluţie singulară, corespunde valorii $C = 0$ în expresia soluţiei generale.

█ *Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei*:

$$\frac{d\,u}{d\,x} = \frac{1}{x\cos u + \sin 2u}.$$

Indicaţie. După cum este scrisă, ecuaţia dată conţine pe *u* funcţie necunoscută şi pe *x* ca variabilă a acesteia. Integrarea ecuaţiei se face însă uşor dacă inversăm rolurile acestor două mărimi şi scriem ecuaţia în forma:

$$\frac{d\,x}{d\,u} = x\cos u + \sin 2u.$$

Conform celor discutate la ecuaţiile diferenţiale liniare, soluţia generală este: $x(u) = C\,e^{\sin u} - 2(1 + \sin u)$.

█ *Să se scrie soluţia generală a ecuaţiei :*

$$y' = 2y + (x+1)\,e^{x}$$

căutând o soluţie particulară de forma membrului perturbator (*neomogen*).

Indicaţie. Vom căuta o soluţie particulară de forma:

$$y_0(x) = (a\,x + b)\,e^{x}$$

Prin identificare se obţine $a = -1$ şi $b = -2$. Ecuaţia diferenţială omogenă ataşată se integrează uşor şi se obţine soluţia: $y_1 = C\,e^{2x}$.

Conform formulei (1'), soluţia generală a ecuaţiei date este:

$$y(x) = C\,e^{2x} - (x+2)\,e^{x}.$$

█ *Să se integreze ecuaţia*:

$$x\,y' + y - y^2 \ln x = 0 \qquad (x > 0).$$

Ce fel de soluţie este $y(x) \equiv 0$?

Indicaţie. Ecuaţia este de tip Bernoulli, cu $\alpha = 2$, deci făcând schimbarea de funcţie $z = \dfrac{1}{y}$ se obţine o ecuaţie liniară, anume:

$$z' = \frac{1}{x} z - \frac{\ln x}{x}.$$

Soluţia generală a acesteia este $z = C x + \ln x + 1$, deci soluţia generală a ecuaţiei date este: $y = \dfrac{1}{C x + \ln x + 1}$. Soluţia $y = 0$ nu poate fi obţinută prin particularizarea constantei *C*, deci este o soluţie singulară, de tip asimptotă.

█ *Să se integreze ecuaţia :*

$$(x y + x^2 y^3)\, y' = 1.$$

Indicaţie. Considerând pe *x* funcţie de *y* se obţine o ecuaţie Bernoulli cu $\alpha = 2$.

█ *În ce condiţii asupra constantelor A, B , C, ecuaţia*:

$y' = A y^2 + \dfrac{1}{x} B y + \dfrac{1}{x^2} C$ admite o soluţie de forma $y = \dfrac{a}{x}$? Să se rezolve ecuaţia în cazul particular $A = B = C = 1$.

Indicaţie. Problema se pune să putem determina parametrul *a* astfel încât $y = \dfrac{a}{x}$ să fie soluţie. Se obţine

$$A a^2 + (B + 1) a + C = 0,$$

deci trebuie să avem $(B+1)^2 - 4AC \geq 0$. În cazul particular dat avem o singură valoare pentru *a*, deci ecuaţia Riccati dată se reduce la o ecuaţie Bernoulli.

█ *Să se integreze ecuaţiile :*

a) $y' + 4xy = xe^{-x^2}$.

b) $(\sin^2 y + x\operatorname{ctg} y) \cdot y' = 1$.

Indicaţie. *a*) Integrăm mai întâi ecuaţia omogenă ataşată : $y^{/}+4xy=0$. Aceasta din urmă are soluţia $y=C\cdot e^{-2x^2}$.

Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene de forma $u(x)=C(x)e^{-2x^2}$, unde $C(x)$ este o funcţie necunoscută.

Înlocuim în ecuaţia iniţială pe:

$$u(x)=C(x)\cdot e^{-2x^2}$$
$$u^{/}(x)=C^{/}(x)\cdot e^{-2x^2}-4xC(x)\cdot e^{-2x^2}$$

şi obţinem $e^{-2x^2}C^{/}(x)-4xC(x)\cdot e^{-2x^2}+4xC(x)\cdot e^{-2x^2}=x\cdot e^{-x^2}$

sau $C^{/}(x)=x\cdot e^{x^2}$, de unde $C(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}$.

Soluţia generală a ecuaţiei este:

$$y(x)=\left(\frac{1}{2}e^{x^2}+C\right)\cdot e^{-2x^2}, \qquad x\in\mathrm{IR}.$$

b) Ecuaţia este neliniară în *y*. Ea este însă liniară în *x*:

$$\frac{dx}{dy}=xctg\,y+\sin^2 y.$$

Aceasta din urmă are soluţiile (sub formă implicită):

$$x=(C-\cos y)\sin y.$$

■ *Să se arate că există o soluţie şi numai una a ecuaţiei*:

$$xy^{/}=(2x^2+1)y+x^2,$$

care are limtă finită pentru $x\to\infty$.

Indicaţie. Rezolvând ecuaţia găsim soluţiile:

$$y=y(x,C)=xe^{x^2}\left(C+\int_0^x e^{-s^2}ds\right), \qquad x\in\mathrm{IR}\,,\quad C\in\mathrm{IR}.$$

Sunt posibile următoarele cazuri:

1) Dacă $C+\int_0^{\infty}e^{-s^2}ds\neq 0$, atunci $\lim_{x\to\infty}\left|y(x,C)\right|=+\infty$.

2) Dacă $C=-\int_0^\infty e^{-s^2}\,ds$ se obţine soluţia

$$\widetilde{y}(x)=-xe^{x^2}\int_{-x}^{\infty}e^{-s^2}\,ds,\qquad x\in \mathrm{IR}\,.$$

Folosind regula lui *l´ Hospital* se obţine că $\lim\limits_{x\to\infty}\widetilde{y}(x)=-\dfrac{1}{2}$.

Să se integreze:

1) $x^2y^{/}-2xy=y^2$. 2) $y^{/}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{x^2y^2}$.

Indicaţie. 1) Ecuaţia este de tip *Bernoulli,* cu $\alpha=+2$, deci folosind schimbarea de funcţie $z=\dfrac{1}{y}$ se obţine ecuaţia liniară

$$z^{/}=-\frac{2}{x}\cdot z-\frac{1}{x^2},$$

a cărei soluţie este $z=\dfrac{1}{x^2}(C-x)$. Revenind la funcţia y obţinem

$$y=0,\;\; y=\frac{x^2}{C-x}.$$

2) Ecuaţia este de tip *Bernoulli,* cu $\alpha=-2$, deci făcând schimbarea de funcţie $z=y^3$ obţinem: $z^{/}+\dfrac{3z}{x}=\dfrac{3}{x^2}$.

Aceasta din urmă are soluţia $z(x)=\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{3}{2x}$ şi deci ecuaţia dată are soluţia:

$$y^3=\frac{2C+3x^2}{2x^3}.$$

§ I.4. Ecuaţii cu diferenţiale totale

Numim ***ecuaţie cu diferenţiale totale*** *orice ecuaţie diferenţială de forma*:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0\,, \qquad (1)$$

unde P şi Q sunt funcţii de clasă C^1_{IR} *pe un domeniu D din planul variabilelor x şi y. Spunem despre o ecuaţie de forma* (1) *că este* ***cu diferenţiale totale exacte*** *dacă există o funcţie* $U : D \to \mathrm{IR}$, *a cărei diferenţială să fie*:

$$dU = P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,. \qquad (2)$$

În acest caz, pentru rezolvare avem :

O condiţie necesară şi suficientă ca $y = \varphi(x)$ *să fie soluţie a unei ecuaţii diferenţiale totale exacte,* (1) *, este ca pentru funcţia U din condiţia* (2) *să avem* $U(x,\varphi(x)) \equiv const$.

Pentru a recunoaşte când suntem în acest caz, folosim teorema :

O condiţie necesară şi suficientă ca o ecuaţie de forma (1) *să fie o ecuaţie cu diferenţiale totale exacte este ca funcţiile P şi Q să verifice relaţia*:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\ . \qquad (3)$$

Pe parcursul demonstraţiei se construieşte funcţia

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(s,y)\,ds + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)\,dt\,, \qquad (4)$$

care este folosită şi în rezolvările concrete.

Dacă nu este verificată condiţia (3), precizăm că :

Se numeşte ***factor integrant*** *pentru o ecuaţie* (1) *orice funcţie* $\mu(x,y)$, *derivabilă cu derivatele parţiale continue şi neidentic nulă, pentru care ecuaţia obţinută după amplificare,*

$$\mu(x,y)\,P(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,Q(x,y)\,dy = 0 \qquad (5)$$

este o ecuaţie cu diferenţiale totale exacte. Cu alte cuvinte, factorul integrant este o funcţie μ pentru care

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}. \qquad (3^{/})$$

În practică nu putem decât să căutăm factori integranţi de forme particulare**:** funcţii numai de *x*, de *y*, de *x*+*y*, de $x \cdot y$ etc.

Probleme § I. 4

■ *Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei***:**

$$(\sin xy + xy\cos xy)dx + x^2 \cos xy\, dy = 0$$

şi apoi să se determine acea soluţie pentru care $y(1) = \frac{\pi}{2}$.
Există soluţii singulare ?

Indicaţie. Se verifică faptul că ecuaţia este cu diferenţiale tota-le exacte. Soluţia este dată implicit de relaţia $x\sin(xy) = C$.

Pentru condiţia Cauchy formulată se găseşte $C = 1$. Familia aces-tor curbe nu admite înfăşurătoare, ci doar o asimptotă $y = 0$. Aceasta este însă o soluţie particulară ce corespunde valorii $C = 0$.

■ *Se consideră ecuaţia diferenţială***:**

$$\left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right]dx + \left[\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right]dy = 0$$

*şi se cere***:**

a) *Care este domeniul de definiţie din planul xOy în care euaţia dată poate fi studiată ca ecuaţie cu diferenţiale totale* ?

b)*Pe ce domeniu din acelaşi plan ecuaţia este echivalentă cu o ecuaţie diferenţială ordinară implicită* $y^{/} = f(x, y)$?

c) *Să se scrie soluţia generală a ecuaţiei date.*

d) *Să se găsească acea soluţie particulară pentru care* $y(1)=2$.

Indicaţie. a) Domeniul pe care funcţiile:

$$P(x,y)=\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2} \quad \text{şi} \quad Q(x,y)=\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y}$$

sunt continue este $D=\mathrm{IR}^2\setminus\{(x,y): x=0 \text{ sau } y=0 \text{ sau } x=y\}$, adică tot planul, mai puţin axele de coordonate şi prima bisectoare.

b) Din domeniul D trebuie să mai scoatem punctele în care $Q(x,y)=0$, şi care sunt date de ecuaţiile $x=\dfrac{y}{1\pm\sqrt{y}}$.

c) Soluţia generală se poate scrie sub forma:

$$\int_1^x\left(\frac{1}{s}-\frac{y^2}{(s-y)^2}\right)ds+\int_2^y\left(\frac{1}{(1-s)^2}-\frac{1}{s}\right)ds=C\,.$$

d) Soluţia particulară corespunde valorii $C=0$ în expresia de mai sus şi este

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right|+\frac{y^2}{x-y}+\frac{1}{1-y}+1+\ln 2-\frac{y^2}{1-y}=0\,.$$

■ *Să se scrie soluţia generală a ecuaţiei*:

$$(3x+2y+y^2)\,dx+(x+4xy+5y^2)\,dy=0$$

ştiind că ea admite un factor integrant funcţie de $x+y^2$.

Indicaţie. Se constată că ecuaţia nu este cu diferenţiale totale exacte, dar admite un factor integrant funcţie de $x+y^2=u$. Din ecuaţia diferenţială a factorului integrant se deduce $\dfrac{1}{\mu}\cdot\dfrac{d\mu}{du}=\dfrac{1}{u}$, de unde rezultă factorul integrant $\mu(u)=u=x+y^2$. Amplificând cu acest factor şi integrând obţinem soluţia generală sub forma:

$$x^3 + x^2 y + 2x^2 y^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5 = C\,.$$

■ *Să se integreze ecuaţia*:

$$(2xy - y^2 - y)\,dx + (2xy - x^2 - x)\,dy = 0\,.$$

Indicaţie. Ecuaţia nu este cu diferenţiale totale exacte, deci se încearcă dacă există factori integranţi de forme particulare.

Se constată că există factori integranţi funcţii numai de $x + y = u$, unul fiind $\mu = \dfrac{1}{(x+y+1)^4}$. Amplificând cu acesta şi integrând se obţine soluţia $\dfrac{xy}{(x+y+1)^3} = C$.

■ *Să se integreze ecuaţia*:

$$y(1 - y\ln x)\,dx + x\,dy = 0, \quad x > 0\,.$$

Indicaţie. Scriind ecuaţia sub forma

$$y' = -\frac{1}{x}y + y^2\,\frac{\ln x}{x}\,,$$

se vede că este vorba de o ecuaţie de tip Bernoulli cu $\alpha = 2$, deci nu mai este necesară aplicarea teoriei pentru ecuaţiile cu diferenţiale totale.

■ *Să se rezolve ecuaţia liniară*

$$y' = a(x)y + b(x)\,,$$

prin metoda factorului integrant. Funcţiile $a, b : (x_1, x_2) \to \mathrm{IR}$ *se presupun a fi continue.*

Indicaţie. Se caută un factor integrant $\mu = \mu(x)$, ca soluţie a ecuaţiei:

$$\frac{d\mu}{dx} = -a(x)\mu\,.$$

De exemplu putem considera ca factor integrant:

$$\mu = e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds}\,, \quad x \in (x_1, x_2)\,,$$

unde x_0 este luat arbitrar din (x_1, x_2).

Se înmulţeşte ecuaţia din enunţ cu μ şi se obţine o ecuaţie diferenţială totală exactă, care rezolvată va conduce la soluţia ecuaţiei date.

Rezolvaţi o ecuaţie diferenţială omogenă folosind metoda factorului integrant.

Indicaţie. Fie ecuaţia omogenă $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ pe care o rescri-em sub forma $f\left(\frac{y}{x}\right)dx - dy = 0$, unde $f : I \subseteq \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$ este o funcţie continuă. Căutăm determinarea unui factor integrant de tipul $\mu\left(\frac{y}{x}\right)$. Înmulţind ecuaţia cu μ obţinem:

$$\mu\left(\frac{y}{x}\right)\cdot f\left(\frac{y}{x}\right)dx - \mu\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0.$$

Prin impunerea condiţiei:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{y}{x}\right)\cdot f\left(\frac{y}{x}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\mu\left(\frac{y}{x}\right)\right),$$

în cazul când μ şi f sunt derivabile, găsim, după ce notăm

$u = \frac{y}{x}$,

ecuaţia cu variabile separabile

$$\mu'(u)\cdot(u - f(u)) = \mu(u)\cdot f'(u),$$

cu soluţia : $\mu(u) = \exp\left(\int \frac{f'(u)}{u - f(u)}du\right)$.

Rezultă ecuaţia cu diferenţială totală exactă:

$$\mu\left(\frac{y}{x}\right)\cdot f\left(\frac{y}{x}\right)dx - \mu\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0,$$

unde μ este funcţia determinată anterior. Atunci, soluţia ecuaţiei omogene date este:

$$\int_{\frac{1}{x_0}}^{\frac{1}{x}} \frac{\mu(u) f(u)}{u^2} du + \int_1^y \mu\left(\frac{s}{x}\right) ds = C, \ C \in \mathrm{IR},$$

unde x_0 este astfel ca $\frac{1}{x_0} \in I$.

█ *Ecuaţiile diferenţiale de forma*:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy + P(x, y)(xdy - ydx) = 0,$$

unde M şi N sunt funcţii omogene de acelaşi grad m, iar P este o funcţie omogenă de grad n, $(n \neq m-1)$ *se numesc ecuaţii Darboux. Să se arate că*:

a) *Dacă* $N \neq 0$*, cu substituţia* $y = xz$*, se obţine o ecuaţie Bernoulli.*

b) *Dacă* $N \neq 0$ *şi* $n = m-2$*, cu aceeaşi substituţie, z va verifica o ecuaţie diferenţială liniară.*

c) *Dacă* $N = 0$*, aceeaşi substituţie conduce la o ecuaţie diferenţială cu variabile separabile.*

Indicaţie. Luând $y = xz$ avem:

$$P(x, y) = P(x, xz) = x^n P(1, z)$$

$$M(x, y) = x^m M(1, z)$$

$$N(x, y) = x^m N(1, z).$$

Ecuaţia dată devine:

$$x^m \left[N(1, z)(xdz + zdx) + M(1, z)dx\right] + x^n P(1, z)\left[x(xdz + zdx) - xzdx\right] = 0$$

sau:

$$x^m \left[N(1, z)(xdz + zdx) + M(1, z)dx\right] + x^{n+2} P(1, z)dz = 0,$$

adică

$$\left[x^{m+1} N(1, z) + x^{n+2} P(1, z)\right]dz + x^m \left[zN(1, z) + M(1, z)\right]dx = 0$$

sau, după împărţirea cu $x^m dz$:

$$xN(1, z) + x^{n-m+2} P(1, z) + \left[zN(1, z) + M(1, z)\right] \cdot x^{/}(z) = 0.$$

De aici se vede că luând x ca funcţie necunoscută şi pe z ca variabilă independentă, pentru $N \neq 0$ avem o ecuaţie Bernoulli $(\alpha = n - m + 2)$, iar pentru $n = m - 2$ avem o ecuaţie diferenţială liniară neomogenă.

Dacă $N = 0$ obţinem ecuaţia cu varibile separate

$$\frac{dx}{x^{n-m+2}} = -\frac{P(1,z)dz}{zN(1,z) + M(1,z)}.$$

■ *Cu ajutorul problemei anterioare, obţineţi soluţia generală a ecuaţiilor următoare*:

a) $xdx + ydy + y(ydx - xdy) = 0$.

b) $xy' - y = x\sqrt{x^2 + y^2}$.

Indicaţie. a) În forma generală a ecuaţiilor date (prezentată în problema anterioară) se vede că avem $M(x, y) = x$ şi $N(x, y) = y$ (care sunt omogene de grad m = 1), iar $P(x, y) = y$ cu omogenitatea $n = 1$. Se obţine astfel

$$xz + x^2 z + (z^2 + 1) \cdot x'(z) = 0, \text{ adică}$$

$$x'(z) = -\frac{z}{z^2+1} \cdot x - \frac{z}{z^2+1} \cdot x^2 \quad \text{(ecuaţie Bernoulli; } \alpha = 2\text{)}$$

Substituind $x(z) = u^{1-\alpha}(z) = \dfrac{1}{u(z)}$ în ecuaţia precedentă găsim

$$-\frac{u'(z)}{u^2} = -\frac{z}{z^2+1} \cdot \frac{1}{u} - \frac{z}{z^2+1} \cdot \frac{1}{u^2},$$

sau:

$$u'(z) = \frac{z}{z^2+1} \cdot u + \frac{z}{z^2+1},$$

adică ecuaţia diferenţială de ordinul întâi poate fi scrisă şi ca ecuaţie cu variabile separate

$$\frac{u'}{u+1} = \frac{z}{z^2+1},$$

care are soluţia $u + 1 = C\sqrt{z^2+1}$, unde C = constantă arbitrară.

Deci, $x = \frac{1}{u} = \frac{1}{C\sqrt{z^2+1}-1}$, iar prin revenirea la substituţia iniţială,

$$y = xz = \frac{z}{C\sqrt{z^2+1}-1} \text{ şi } x = \frac{1}{C\sqrt{z^2+1}-1},$$

deci putem pune soluţia sub formă parametrică.

Dacă explicităm pe *z* în funcţie de *x* şi revenim în expresia lui *y* ca funcţie de *z* putem obţine şi soluţia sub formă explicită.

b) Ecuaţia se mai scrie: $x\,dy - y\,dx = x\sqrt{x^2+y^2}\,dx$.

Se vede că în această formă $P(x, y) = 1$, $N(x, y) = 0$ şi $M(x, y) = x\sqrt{x^2+y^2}$ (pe *M* şi *N* le putem considera omogene de acelaşi grad, *m* = 2).

Conform problemei anterioare, ajungem prin substituţia $y = xz$ la ecuaţia cu variabile separate:

$$\frac{dx}{x^{0-2+2}} = -\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

De aici, prin integrare găsim $x = -\arcsin z + C$ sau: $z = -\sin(x+C)$ adică $y = -x\sin(x+C)$.

§ I.5. Ecuaţii diferenţiale implicite

Ecuaţiile diferenţiale implicite au forma

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

unde, cel puţin din punct de vedere practic, nu putem explicita pe y', sau această explicitare nu ne este utilă. Suprafaţa *S*, *ataşată ecuaţiei diferenţiale* (1), de ecuaţie

$$F(x, y, z) = 0, \qquad (2)$$

oferă o interpretare geometrică simplă, care conduce la soluţii :

O condiţie necesară şi suficientă ca $y = \varphi(x)$ *să fie soluţie pentru ecuaţia* (1) *este ca această funcţie să definească ecuaţia unei curbe care se obţine prin proiecţia pe planul x*O*y a unei curbe* Γ *de pe suprafaţa S, de-a lungul căreia să fie satisfăcută condiţia*

$$dy = z\,dx. \qquad (3)$$

În particular, această teoremă permite rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale de formele

$$y = f(x, y') \qquad (1')$$

şi

$$x = g(y, y') \qquad (1'')$$

prin scrierea parametrică a soluţiilor, parametrul fiind $p = y'$.

Ecuaţia diferenţială

$$y = xA(y') + B(y'), \qquad (4)$$

unde A şi B sunt funcţii cu derivate continue pe un interval (*a*,*b*), *se numeşte* ***ecuaţia lui Lagrange***.

Soluţia generală a ecuaţiei Lagrange are forma

$$\begin{cases} x = Cu(p) + v(p) \\ y = A(p)[Cu(p) + v(p)] + B(p), \end{cases}$$

unde $x(p)$ *este soluţie a ecuaţiei diferenţiale liniare*:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{A'(p)}{A(p) - p}x + \frac{B'(p)}{A(p) - p} = 0. \qquad (5)$$

Dreptele $y = sx + B(s)$, *unde s sunt soluţii ale ecuaţiei*:

$$A(p) - p = 0\,, \qquad (6)$$

sunt soluţii singulare.

Metodă practică . Pentru a integra o ecuaţie Lagrange, se scrie mai întâi ecuaţia (5), care se obţine înlocuind în ecuaţie $y' \equiv p$ si diferenţiind în ambii membri. Soluţia generală se obţine integrând ecuaţia liniară obţinută, la care se adaugă expresia parametrică a lui *y*, scoasă din ecuaţie. Se rezolvă ecuaţia (6) şi se scriu dreptele care sunt soluţii singulare.

Ecuaţia

$$y = xy' + B(y')\,, \qquad (7)$$

unde B este o funcţie cu derivata continuă pe un interval (*a*,*b*) *se numeşte* ***ecuaţia lui Clairaut*****.**

Soluţia generală a ecuaţiei Clairaut este dată de familia de drepte $y = Cx + B(C)$, *iar curba* $\wp$, *de ecuaţii*:

$$\begin{cases} x = -B'(p) \\ y = -pB'(p) + B(p) \end{cases}$$

este o soluţie singulară de tip înfăşurătoare.

Metodă practică . Pentru integrarea unei ecuaţii Clairaut (7), se înlocuieşte(formal) $p = C$ în ecuaţie, şi se obţine o familie de drepte ce reprezintă soluţia generală. Înfăşurătoarea acestei familii de drepte reprezintă soluţia singulară a ecuaţiei Clairaut.

Probleme § I. 5

■ (*Asupra unicităţii soluţiei problemei lui Cauchy pentru ecuaţiile implicite*). *Să se integreze ecuaţia*:

$$(y')^2 - (x + y)y' + xy = 0$$

şi apoi să se rezolve următoarele probleme ale lui Cauchy:

$$y(1) = 1 \quad , \quad y(0) = 0\,.$$

Indicaţie. Rezolvând algebric în raport cu y', se obţin două ecuaţii diferenţiale**:** $y' = x$ şi $y' = y$**.** Integrând obţinem:

$$y = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$y = C_2 e^x,$$

deci se obţin două familii de curbe**.** În plus, tot soluţii sunt şi curbele ce se obţin prin racordarea a câte unei curbe din prima familie cu una din a doua familie, dacă tangentele în punctul de intersecţie coincid**.** În consecinţă problema lui Cauchy nu are soluţie unică**.** În cazul $y(1) = 1$, pe lângă cele două soluţii:

$$y = \frac{x^2+1}{2} \quad \text{şi} \quad y = e^{x-1}$$

mai avem drept soluţii şi curbele:

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{2} & \text{, pentru} \quad x \le 1 \\ e^{x-1} & \text{, pentru} \quad x > 1 \end{cases} \quad \text{şi} \quad y(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{, pentru} \quad x \le 1 \\ \dfrac{x^2+1}{2} & \text{, pentru} \quad x > 1. \end{cases}$$

█ *Să se integreze ecuaţia*:

$$y = (y')^2 - xy' + \frac{x^2}{2}.$$

Indicaţie. Ecuaţia are forma $y = f(x, y')$, fără a fi de tip Lagrange sau Clairaut . Suprafaţa *S* se scrie parametric:

$$\begin{cases} x = x \\ y = p^2 - xp + \dfrac{x^2}{2} \\ z = p \end{cases}.$$

Condiţia (3), cu $z = p$ se va scrie $(2p - x)(dp - dx) = 0$, deci avem $dp = dx$, fie $2p - x = 0$**.** Integrând prima relaţie obţinem soluţia generală $x = p + C$, deci

$$y=(x+C)^2-x(x+C)+\frac{x^2}{2}.$$

Din a doua condiţie, $x=2p$, găsim $y=\frac{x^2}{4}$, care este o solu- ţie singulară**.**

■ *Să se integreze ecuaţia*:

$$y=2xy'-(y')^2.$$

Ce fel de soluţie este dreapta $y=0$?

Indicaţie. Ecuaţia dată este de tip Lagrange. Notând $y'=p$, ecuaţia $dy=z\,dx$ se scrie $p\frac{dx}{dp}+2x=2p$. Integrând se obţine: $x=\frac{2}{3}p+\frac{C}{p^2}$, care conduce la soluţia generală:

$$\begin{cases} x=\frac{2}{3}p+\frac{C}{p^2} \\ y=\frac{p^2}{3}+\frac{2C}{p}. \end{cases}$$

Condiţia $A(p)-p=0$ indică o singură valoare, $s=0$, pentru care se obţine soluţia singulară $y=0$.

■ *Să se integreze ecuaţia*:

$$x(y')^2-yy'+a=0.$$

Indicaţie. Scriind ecuaţia sub forma $y=xy'+\frac{a}{y'}$, obţinem o ecuaţie Clairaut cu $B(y')=\frac{a}{y'}$. Soluţia generală este $y=Cx+\frac{a}{C}$.

Familia acestor drepte are ca înfăşurătoare parabola $y^2=4ax$, care reprezintă soluţia singulară**.**

■ *Să se integreze ecuaţia*:

$$x = \frac{y + y^2}{y'}.$$

Indicaţie. Ecuaţia are forma $x = g(y, y')$. Suprafaţa S va fi:

$$\begin{cases} x = g(y, p) \\ y = y \\ z = p. \end{cases}$$

Condiţia $dy = z\,dx$ se scrie $dy = p\left(\frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial p}dp\right)$, şi în cazul nostru obţinem o ecuaţie cu variabile separabile $\frac{2\,dy}{1+y} = \frac{dp}{p}$, care are soluţia generală $p = C(1+y)^2$, deci avem $y = C(xy + x)$.

Soluţii singulare nu există căci ecuaţia dată are forma ecuaţiei Riccati**.**

█ *Ce suprafaţă de rotaţie trebuie să reprezinte oglinda unui proiector, pentru ca toate razele de lumină ce pleacă de la o sursă punctiformă să fie reflectate paralel cu o direcţie dată*?

Indicaţie. Considerăm un plan meridian pe care îl luăm *x*O*y*. Axa O*x* o alegem paralelă cu direcţia după care lumina trebuie să fie reflectată, iar originea în sursa de lumină (ca în figura I.1.6.).

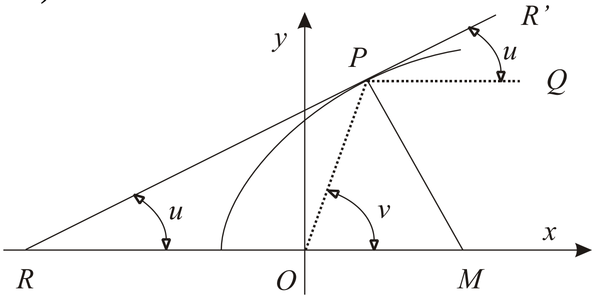

Fig. I.1.6.

Conform legilor reflexiei avem

$$\angle \mathrm{OPM} = \angle \mathrm{MPQ} \text{ şi } \angle \mathrm{RPO} = \angle \mathrm{R}^{/}\mathrm{PQ},$$

deci $v = 2u$. Deoarece $\operatorname{tg} v = \dfrac{y}{x}$, $\operatorname{tg} u = y^{/}$, iar $\operatorname{tg} 2u = \dfrac{2\operatorname{tg} u}{1-\operatorname{tg}^2 u}$,

obţinem ecuaţia $\dfrac{y}{x} = \dfrac{2y'}{1-y'^{\,2}}$.

Integrând această ecuaţie se obţine soluţia $y^2 = 2C\left(x + \dfrac{C}{2}\right)$, deci curba meridiană este o parabolă cu vârful pe $0x$, iar oglinda este un paraboloid de rotaţie de ecuaţie

$$y^2 + z^2 = 2Cx + C^2.$$

Valoarea lui C se leagă de dimensiunea oglinzii, fiind egală cu raza secţiunii transversale în dreptul focarului.

CAPITOLUL II

ECUAŢII DIFERENŢIALE DE ORDIN SUPERIOR

§ II.1. Cazuri de reducere a ordinului

Ecuaţiile diferenţiale de ordin superior au forma:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \qquad (1)$$

sau explicit:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \qquad (1')$$

Soluţia generală depinde de n constante $C_1, \dots, C_n$ arbitrare,

$$y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n). \qquad (2)$$

Problema lui Cauchy constă în determinarea acelei soluţii particulare pentru care:

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_1, \dots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \qquad (3)$$

Ca şi în cazul ecuaţiilor de ordinul I, rezolvarea nu este posibilă decât dacă ecuaţia are o formă particulară şi se bazează de cele mai multe ori pe reducerea ordinului (vezi problema 8).

Soluţia generală a ecuaţiei

$$y^{(n)} = f(x), \qquad (4)$$

unde f este o funcţie continuă pe un interval (a,b), *este*:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s)ds + C_1 \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} +$$

$$+ \dots + C_n, \qquad (5)$$

unde $x_0 \in (a,b)$ *este un punct fixat*.

Prezentăm câteva exemple de cazuri în care rezolvarea este posibilă în urma reducerii ordinului prin diverse substituţii :

Dacă într-o ecuaţie diferenţială de ordin n, de forma (1), *lipseşte funcţia y şi primele sale k*-1 *derivate, ordinul ecuaţiei se poate reduce cu k unităţi.*

În practică facem substituţia $y^{(k)}(x) = z(x)$.

Dacă într-o ecuaţie diferenţială de forma (1) *lipseşte variabila independentă x, se poate reduce ordinul ecuaţiei cu o unitate.*

Practic aceasta se realizează prin schimbarea de funcţie şi de variabilă $y^{/}(x) = z(y)$.

Dacă ecuaţia diferenţială (1) *are forma*

$$G(y, xy^{/}, x^2 y^{//}, \dots, x^n y^{(n)}) = 0,$$

se poate reduce ordinul cu o unitate.

Se face o schimbare de variabilă, notând $x = e^t$.

Dacă ecuaţia diferenţială de ordin superior (1) *are forma*:

$$G\left(\frac{y}{x}, y^{/}, xy^{//}, \dots, x^{n-1} y^{(n)}\right) = 0 \text{ (\textit{ecuaţie omogenă generalizată})}$$

se poate reduce ordinul cu o unitate.

Practic vom face schimbarea de funcţie $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$.

Probleme § II. 1

■ *Să se arate că putem reduce ordinul ecuaţiei*:

$$F\left(x, \frac{y^{/}}{y}, \dots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0$$

cu o unitate.

Indicaţie. Făcând schimbarea de funcţie $u = \dfrac{y^{/}}{y}$ se obţine:

$$\frac{y''}{y} = u' + u^2\,, \quad \frac{y'''}{y} = u'' + 3uu' + u^3\,, \text{ ş.a.m.d.}$$

Ecuaţia în *u* va fi de forma $G(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}) = 0$.

█ *Se dă ecuaţia diferenţială*:

$$y^{\mathrm{VII}} = 1 - \cos x$$

şi se cere:

a) *Să se scrie soluţia generală.*

b) *Să se găsească acea soluţie particulară pentru care avem*:

$$y(0) = y''(0) = y^{\mathrm{IV}}(0) = y^{\mathrm{VI}}(0) = 0,\, y'(0) = y^{\mathrm{V}}(0) = 1,\;\; y^{\mathrm{III}}(0) = -1.$$

c) *Să se verifice rezultatul de la punctul* b) *dezvoltând soluţia obţinută în serie Taylor în jurul punctului* $x = 0$.

Indicaţie. a) Se aplică formula (5) stabilită pentru ecuaţii de forma $y^{(n)} = f(x)$.

b) Soluţia căutată este $y(x) = \sin x + \dfrac{x^7}{7!}$.

█ *Să se scrie soluţia generală a ecuaţiei*:

$$4y^{\mathrm{III}^2} - 3y''y^{\mathrm{IV}} = 0.$$

Indicaţie. Ţinem cont mai întâi că lipseşte *y* şi y', deci notând $y''(x) = z(x)$ obţinem $4(z')^2 - 3zz'' = 0$. Deoarece nici aici nu apare *x* explicit, notăm $z'(x) = u(z)$. Obţinem $z''(x) = u'u$, deci avem $4u^2 - 3zuu' = 0$. Soluţia $u(z) = 0$ conduce la $z'(x) = 0$, deci $z(x) = C$ şi $y(x) = Cx^2 + C_1x + C_2$. Ecuaţia $4u - 3zu' = 0$ este cu variabilă separabilă şi conduce la soluţia $u = C_3z^{\frac{4}{3}}$. Revenind, din $\dfrac{dz}{dx} = C_3z^{\frac{4}{3}}$, găsim $z(x) = (C_3x + K)^{-3}$ şi apoi calculăm pe *y*(*x*).

■ *Să se scrie soluţia generală pentru ecuaţii diferenţiale de forma* $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$. *Aplicaţie la ecuaţia* $y^{\mathrm{III}} = \sqrt{1 + (y'')^2}$.

Indicaţie. Se notează $y^{(n-1)}(x) = z(x)$ şi se reduce problema la integrarea ecuaţiei $F(z, z') = 0$, care nu conţine pe x. În cazul particular dat se găseşte:

$$y(x) = \mathrm{sh}(x + C_1) + C_2 x + C_3 .$$

■ *Să se integreze ecuaţia*:

$$y'' = 2yy' .$$

Indicaţie. Lipseşte variabila independentă. Notând $y'(x) = z(y)$ obţinem $z\dfrac{dz}{dy} = 2yz$, de unde $z = 0$, sau $z = y^2 + C_1$.

Rezultă $\dfrac{dy}{y^2 + C_1} = dx$, unde se disting următoarele cazuri:

a) $C_1 > 0$, când soluţia generală este: $\dfrac{1}{\sqrt{C_1}} arctg \dfrac{y}{\sqrt{C_1}} = x + C_2$.

b) $C_1 < 0$, când soluţia generală este:

$$\frac{1}{2\sqrt{-C_1}} \ln\left|\frac{y - \sqrt{-C_1}}{y + \sqrt{-C_1}}\right| = x + C_2$$

c) $C_1 = 0$, când soluţia generală este $y = \dfrac{-1}{x + C_2}$.

■ *Să se integreze ecuaţia*:

$$xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0 .$$

Indicaţie. $y(x) = 0$ este o soluţia banală. Considerând apoi $y \neq 0$ şi împărţind cu y^2, ecuaţia ia forma:

$$x\frac{y''}{y} - x\left(\frac{y'}{y}\right)^2 - \frac{y'}{y} = 0 .$$

Este deci indicată substituţia $\dfrac{y'}{y} = z$, ca în problema (1).

■ (*Ecuaţia lănţişorului*). *Folosind procedeul derivării, să se integreze ecuaţia*:

$$1 + (y')^2 = yy''.$$

Să se compare acest procedeu cu rezolvarea în cazul când lipseşte x.

Indicaţie. Derivând în ecuaţia dată obţinem $yy''' = y'y''$. Deoarece $yy'' \neq 0$ (vezi ecuaţia !), împărţim prin yy'' şi obţinem:

$$\frac{dy''}{y''} = \frac{dy}{y}.$$

Integrând ca în ecuaţiile cu derivabile separabile, se obţine:

$$y'' - Cy = 0,$$

unde deoarece $yy'' > 0$, avem $C > 0$. Vom vedea (chiar în capito-lul II) că aceste ecuaţii se rezolvă uşor, soluţia căutată fiind:

$$y(x) = K_1 e^{\sqrt{c}\,x} + K_2 e^{-\sqrt{c}\,x}.$$

Înlocuind această soluţie în ecuaţia lănţişorului se obţine $4CK_1K_2 = 1$, ceea ce permite scrierea soluţiei generale doar în două constante arbitrare. Considerând ecuaţia de tipul $F(y, y', y'') = 0$, notăm $y'(x) = z(y)$ şi obţinem $1 + z^2 = y\,z\,z'$, care este cu variabile separabile. Integrarea ecuaţiei cu variabile separabilă este simplă, dar revenirea la soluţia $y(x)$ este anevoiasă în comparaţie cu primul procedeu.

§ II.2. Ecuaţii diferenţiale liniare de ordin superior

Numim ***ecuaţie diferenţială ordinară liniară****, de ordinul* ***n****, orice ecuaţie de forma*:

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = f(x), \qquad (1)$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *şi f sunt funcţii continue* (*de obicei reale*) *pe un interval* $[a,b]$. *Dacă* $f(x) = 0$, *spunem despre ecuaţia* (1) *că este* ***omogenă****. Fiind dată o ecuaţie o ecuaţie de forma* (1) *ecuaţia*:

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = 0, \qquad (2)$$

se numeşte ***ecuaţie omogenă ataşată*** *ecuaţiei* (1)*. Operatorul* $L : C^{n}_{\mathrm{IR}}([a,b]) \to C_{\mathrm{IR}}([a,b])$, *care se ataşează fiecărei funcţii de n ori derivabilă şi cu derivata a n - a continuă, o altă funcţie conti-nuă, prin formula*:

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y \qquad (3)$$

se numeşte ***operatorul diferenţial liniar*** *ataşat ecuaţiei* (1)**.**

Soluţia generală a ecuaţiei (1) este suma dintre o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene şi soluţia generală a ecuaţiei omogene ataşate**.**

Numim ***determinant al lui Wronski****, sau* ***wronskian****, al funcţiilor* $y_1, y_2, \ldots, y_p$ *, presupuse de* (*p*-1) *ori derivabile, determinantul* :

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_p) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_p \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_p' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(p-1)} & y_2^{(p-1)} & \ldots & y_p^{(p-1)} \end{vmatrix}.$$

Wronskianul este util în studiul independenţei soluţiilor :

O condiţie necesară şi suficientă ca n soluţii ale unei ecuaţii diferenţiale liniare omogene de ordin n să fie liniar dependente pe [*a*, *b*] *este ca wronskianul lor să fie identic nul pe* [*a*, *b*]**.**

Dacă n funcţii $y_1,...,y_n$ *reprezintă soluţii ale unei ecuaţii liniare omogene de ordin n (de forma (2)) şi dacă wronskianul acestor funcţii nu este nul într-un punct al lui* $[a,b]$, *atunci wronskianul respectiv nu este nul în nici un punct din* $[a,b]$ (Teorema Abel – Ostrogradski - Liouville).

Soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene de ordin *n* este de forma:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + ... + C_n y_n(x), \qquad (4)$$

unde $y_1, ... , y_n$ sunt *n* soluţii liniar independente particulare.

Metoda variaţiei constantelor (Lagrange). *Dacă înlocuim constantele* $C_1, ... , C_n$ *din formula* (4) *a soluţiei generale pentru ecuaţia* (2), *ataşată ecuaţiei* (1), *cu funcţiile* $C_1(x)$ *, ... ,* $C_n(x)$ *presupuse derivabile, se pot determina aceste funcţii încât funcţia* :

$$y_0(x) = C_1(x) y_1(x) + ... + C_n(x) y_n(x) \qquad (5)$$

să fie o soluţie particulară a ecuaţiei (1).

În practică se rezolvă sistemul

$$\begin{cases} C_1' y_1 + ... + C_n' y_n = 0 \\ .... \\ C_1' y_1^{(n-2)} + ... + C_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1' y_1^{(n-1)} + ... + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

cu necunoscutele $C_1',...,C_n'$ şi determinantul principal $W \neq 0$.

Metoada practică. Pentru a integra o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul *n*, de forma (1), căutăm *n* soluţii liniar independente ale ecuaţiei omogene ataşate (2) şi scriem soluţia generală a acestei ecuaţii omogene în forma (4). Aplicând metoda variaţiei constante-lor găsim o soluţie particulară y_0 a ecuaţiei (1) şi apoi scriem soluţia generală a ecuaţiei (1) sub forma

$$y(x) = y_0(x) + C_1 y_1(x) + ... + C_n y_n(x).$$

Soluţii particulare ale ecuaţiei neomogene se pot găsi şi prin încercări (identificări) în expresii de forma membrului drept, f.

Probleme § II.2

█ *Să se scrie soluţia generală a ecuaţiei*:

$$(2x^2 - 2\pi x + \pi^2)y'' - 2(2x - \pi)y' + 4y = 0$$

ştiind că această ecuaţie admite soluţii de formă polinomială. *Să se rezolve apoi problema lui Cauchy corespunzătoare condiţiilor*:

$$y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Indicaţie. Căutăm soluţia de forma $y(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$. Prin înlocuirea în ecuaţie, coeficientul termenului de grad n este $4a_n - 4na_n + 2n(n-1)a_n$. Deoarece ecuaţia trebuie să fie verificată identic de y, deducem $n^2 - 3n + 2 = 0$, adică $n_1 = 1$ şi $n_2 = 2$. În primul caz, căutând soluţia de forma $y = ax + b$ obţi-nem $\pi a + 2b = 0$, deci $y_1 = a\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. În cazul al doilea, căutând soluţia de forma $y = ax^2 + bx + c$, găsim condiţia:

$$a\pi^2 + b\pi + 2c = 0,$$

deci $y_2(x) = ax^2 + bx - \frac{1}{2}(a\pi^2 + b\pi)$. Se verifică direct că $W(y_1, y_2) \neq 0$, oricare ar fi $x \in \mathrm{IR}$. Soluţia generală poate fi scrisă sub forma $C_1 y_1 + C_2 y_2$, sau putem lua pe y_2 drept soluţia generală, căci are două constante. Soluţia problemei lui Cauchy este $y(x) = -\frac{1}{2}x(x - \pi)$.

■ *Să se scrie ecuaţiile diferenţiale liniare care au drept soluţii funcţiile*:

a) $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$ b) $y_1 = e^{-\frac{x}{2}}$, $y_2 = e^{x}$, $y_3 = xe^{x}$.

Indicaţie. Se verifică mai întâi că wronskianul soluţiilor nu este identic nul pe IR. Ecuaţia căutată se obţine prin bordarea wronskianului; de exemplu în cazul a) obţinem:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y \\ y_1' & y_2' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y'' \end{vmatrix} = 0,$$

care reprezintă condiţia ca y să fie combinaţie liniară de y_1 şi y_2. Ecuaţia este $y'' + y = 0$. În cazul b) se procedează la fel.

■ *Se dă ecuaţia*

$$(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^3 e^{2x}.$$

a) *să se scrie soluţia generală a ecuaţiei omogene ataşate, ştiind că admite soluţii sub formă polinomială şi sub formă exponenţială*.

b) *să se scrie soluţia generală a ecuaţiei neomogene*.

Indicaţie. Căutând soluţii de forma $y = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$, se găseşte mai întâi $n = 1$. Înlocuind $y = a_0 + a_1 x$ în ecuaţia omo-genă se obţine $a_0 = 0$, deci o soluţie este $y_1 = a_1 x$.

Căutând soluţii de forma $y = ae^{bx}$, se obţin pentru b condiţii-le $b^2 - b = 0$ şi $-b^2 + 1 = 0$, care se verifcă pentru $b = 1$. O altă soluţie este deci $y_2 = ae^{x}$. Deoarece wronskianul lor este nenul, soluţia generală a ecuaţiei omogene ataşate este $y = C_1 e^{x} + C_2 x$. Aplicând metoda variaţiei constantelor obţinem $C_1^{/}(x)=(1-x)e^{2x}$ şi $C_2^{/}(x)=(x^2-x)e^{2x}$. Soluţia particulară căutată poate fi:

$$y_0(x)=e^{2x}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{9}{4}x+3\right),$$

deci soluţia generală a ecuaţiei date este $y=C_1e^x+C_2x+y_0$.

■ *Să se arate că dacă se cunoaşte o soluţie* $y_1 \neq 0$ *a unei ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene, prin substituţia* $y=y_1z$ *se poate reduce ordinul ecuaţiei cu o unitate. Să se aplice rezultatul ecuaţiei* $y^{//}+a(x)y^{/}+b(x)y=0$.

Indicaţie. Înlocuind $y=y_1z$ în ecuaţia $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+$ $+a_ny=0$ se obţine ecuaţia $z^{(n)}+b_1z^{(n-1)}+...+b_nz=0$. Deoarece $y=y_1$ este soluţie a ecuaţiei date, $z=1$ va fi soluţie a ecuaţiei obţinută prin transformare. Rezultă astfel că avem totdeauna $b_n=0$, deci în ecuaţia în *z* lipseşte *z*. Notând $z^{/}(x)=u(x)$, ordinul se reduce cu o unitate.

În cazul particular dat, ecuaţia în *z* este:

$$z^{//}+\left(2\frac{y_1^{/}}{y_1}+a(x)\right)z^{/}=0,$$

iar ecuaţia în *u* este cu variabile separabile:

$$\frac{du}{u}+\left(2\frac{y_1^{/}}{y_1}+a\right)dx=0.$$

Integrând obţinem $u(x)=\dfrac{C_1}{y_1^2(x)}e^{-\int_{x_0}^{x}a(s)ds}$

şi apoi : $z(x)=C_1\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{1}{y_1^2(t)}e^{-\int_{t_0}^{t}a(s)ds}dt+C_2$.

■ *Să se integreze ecuaţia*:

$$xy^{///} - y^{//} - xy^{/} + y = 0$$

prin reducerea ordinului, ştiind că admite soluţii particulare de forma exponenţialelor.

■ *Să se stabilească dacă următoarele sisteme de funcţii sunt liniar dependente sau nu*:

a) $y_0 = 1$, $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, ..., $y_n = x^n$.

b) $y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = e^{r_2 x}$, $y_3 = e^{r_3 x}$, $r_1, r_2, r_3 \in \mathrm{IR}$.

c) $y_1 = x^2 + x + 1$, $y_2 = x^2 - x + 1$, $y_3 = x^2 + 5x + 1$.

Indicaţie. a) Orice combinaţie liniară este un polinom de grad cel mult *n*, care nu poate fi identic nul decât dacă toţi coeficienţii sunt nuli; funcţiile sunt deci liniar independente.

b) Calculăm wronskianul, care va fi un determinant Vandermonde.

c) Procedăm ca în cazul a) sau calculăm wronskianul; se obţi-ne o combinaţie liniară de forma $-3y_1 + 2y_2 + y_3 = 0$. Dacă folosim wronskianul, folosind teorema Abel – Ostrogradski – Liouville, putem calcula acest determinant într-un singur punct.

■ *Fie $y_1,...,y_n$ un sistem fundamental de soluţii pentru o ecuaţie diferenţială liniară omogenă de ordinul n. Să se arate că funcţiile* $z_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij} y_j$, $i = 1,...,n$, *formează un sistem fundamental de soluţii pentru această ecuaţie dacă şi numai dacă* $C = |C_{ij}| \neq 0$.

Indicaţie. Se stabileşte relaţia:

$$W(z_1, \dots, z_n) = W(y_1, \dots, y_n) \cdot C.$$

§II. 3. Ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

Considerăm cazul particular de ecuaţii diferenţiale liniare,

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_n y = f(x), \qquad (1)$$

când $a_1, \ldots, a_n$ sunt constante reale, sau complexe, iar *f* este o funcţie continuă pe IR. Problema principală este scrierea soluţiilor pentru ecuaţia diferenţială liniară omogenă ataşată

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0. \qquad (2)$$

Polinomul

$$P(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \ \ldots + a_n$$

se numeşte ***polinomul caracteristic*** *al ecuaţiei. Rădăcinile lui P se numesc* ***numere caracteristice*** *sau* ***valori proprii.***

Metoda practică. Pentru a scrie soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene de ordinul *n*, de forma (2), scriem polinomul său caracteristic *P*(*r*) şi găsim valorile proprii. Atunci:

a) Fiecare rădăcină reală simplă, *r*, ne dă o soluţie de forma

$$y = e^{rx}.$$

b) Fiecare rădăcină reală *r*, multiplă de ordinul *p*, ne dă *p* soluţii şi anume

$$y_1 = e^{rx}, \ y_2 = xe^{rx}, \ \ldots, \ y_p = x^{p-1}e^{rx}.$$

c) Dacă *P* are coeficienţi reali, fiecare rădăcină complexă simplă $r = a + ib$, împreună cu conjugata sa, ne furnizează două soluţii şi anume

$$y_1 = e^{ax}\cos bx \ \text{ şi } \ y_2 = e^{ax}\sin bx.$$

d) Dacă *P* are coeficienţi reali, fiecare rădăcină complexă $r = a + ib$, multiplă de ordinul *p*, ne furnizează 2*p* soluţii şi anume

$$y_1 = e^{ax}\cos bx, \ y_2 = e^{ax}\sin bx, \ y_3 = xe^{ax}\cos bx, \ y_4 = xe^{ax}\sin bx,$$

$$\ldots, y_{2p-1} = x^{p-1}e^{ax}\cos bx, \ y_{2p} = x^{p-1}e^{ax}\sin bx.$$

Soluţia generală a ecuaţiei (2) va fi o combinaţie liniară de aceste *n* soluţii.

O soluţie particulară a ecuaţiei neomogene (1), y_0 se poate obţine totdeauna prin metoda variaţiei constantelor, dar în câteva cazuri putem identifica anumite soluţii de forma membrului drept.

Cazul 1. *Dacă* $f(x) = C_0 + C_1 x + ... + C_m x^m$, *atunci :*

a) *dacă* $a_n \neq 0$, *ecuaţia* (1) *admite o soluţie de forma*

$$y_0(x) = d_0 + d_1 x + ... + d_m x^m$$

b) *dacă* $a_n = a_{n-1} = ... = a_{n-p+1} = 0$ *şi* $a_{n-p} \neq 0$, *atunci ecuaţia* (1) *admite o soluţie de forma*

$$y_0(x) = x^p (d_0 + d_1 x + ... + d_m x^m) \quad .$$

Cazul 2. *Membrul drept în ecuaţia* (1) *este*

$$f(x) = e^{sx}\left(C_0 + C_1 x + ... + C_m x^m \right), \quad s \in \mathrm{IR}.$$

a) *Dacă s nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, ecuaţia* (1) *va admite o soluţie particulară de forma*

$$y_0(x) = e^{sx}\left(d_0 + d_1 x + ... + d_m x^m \right).$$

b) *Dacă s este o rădăcină multiplă de ordinul p pentru ecuaţia caracteristică, adică*

$$P(s) = P^{/}(s) = ... = P^{(p-1)}(s) = 0 , \quad P^{(p)}(s) \neq 0 ,$$

atunci ecuaţia (1) *admite o soluţie particuară de forma* :

$$y_0(x) = x^p e^{sx}\left(d_0 + d_1 x + ... + d_m x^m \right).$$

Cazul 3. *Dacă membrul drept al ecuaţiei* (1) *are forma*

$$f(x) = e^{sx} \cos \omega x \left(C_0 + C_1 x + ... + C_m x^m \right),$$

unde s, ω *şi* $C_0, C_1, ..., C_m$ *sunt numere reale, iar coeficienţii polinomului caracteristic sunt de asemenea numere reale, atunci* :

a) *Dacă* $s + i\omega$ *nu este rădăcină a polinomului caracteristic, ecuaţia* (1) *va admite o soluţie particulară de forma*

$$y_0(x) = e^{sx} \cdot [S(x)\cos\omega x + T(x)\sin\omega x],$$

unde S şi T sunt polinoame de gradul m în x.

b) *Dacă* $s+i\omega$ *este o rădăcină multiplă de ordin p* pentru *polinomul caracteristic, ecuaţia* (1) *va admite o soluţie particulară*

$$y_0(x) = x^p e^{sx} \cdot [S(x)\cos\omega x + T(x)\sin\omega x],$$

unde S şi T sunt polinoame de gradul m în x.

Acelaşi rezultat se obţine şi dacă membrul drept are forma

$$f(x) = e^{sx}\sin\omega x\left(C_0 + C_1 x + ... + C_m x^m\right).$$

Dacă în membrul drept al ecuaţiei (1) avem o sumă de expresii de formele considerate, o soluţie particulară se poate obţine ca sumă a unor soluţii parţiale, corespunzătoare membrului drept numai de aceste forme.

Ecuaţia diferenţială liniară

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x),$$

unde $a_1, ..., a_n$ *sunt numere, iar* $f : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$ *este o funcţie continuă pe* IR*, se numeşte* ***ecuaţia lui Euler*** (*neomogenă*).

Prin schimbarea de variabilă $x = e^t$, orice ecuaţie de tip Euler se reduce la o ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi.

Probleme § II. 3

█ *Să se scrie acea soluţie a ecuaţiei*

$$y^{\mathrm{IV}} - 5y'' + 4y = 0$$

care satisface condiţiile: $y(0) = 1,\ y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.

Indicaţie. Ecuaţia caracteristică este $r^4 - 5r^2 + 4 = 0$, deci este o ecuaţie bipătrată. Rădăcinile $r_1 = -2,\ r_2 = -1,\ r_3 = 1,\ r_4 = 2$ sunt dis-tincte, deci soluţia generală are forma

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{x} + C_4 e^{2x}.$$

Rezolvarea problemei lui Cauchy se reduce la identificarea constantelor C_1, C_2, C_3 şi C_4.

■ *Să se scrie soluţia generală a ecuaţiei*

$$y^{VII} + 3y^{VI} + 3y^{V} + y^{IV} = 0.$$

Indicaţie. Ecuaţia caracteristică $r^7 + 3r^6 + 3r^5 + r^4 = 0$ are rădăcini multiple $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0$ şi $r_5 = r_6 = r_7 = -1$. Soluţia generală va fi

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 e^{-x} + C_6 x e^{-x} + C_7 x^2 e^{-x}.$$

■ *Să se scrie soluţia generală a ecuaţiei*

$$y^{VII} + 4y^{V} + 4y^{III} + y^{\prime} = 0.$$

Indicaţie. Ecuaţia caracteristică este $r^7 + 4r^5 + 4r^3 + r = 0$. O rădăcină este $r_0 = 0$ şi conduce la soluţia $y = C_0$. Celelalte rădăcini se obţin din ecuaţia $r^6 + 4r^4 + 4r^2 + 1 = 0$ care este o ecuaţie reciprocă. Notăm $r + \frac{1}{r} = u$ şi dând factor comun pe r^3 se obţine ecuaţia $u^3 + u = 0$. Soluţia $u_1 = 0$ conduce la rădăcinile $r_{1,2} = \pm i$. Soluţiile $u_{2,3} = \pm i$ duc la rădăcinile $r_{3,4} = i\,\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ şi $r_{5,6} = i\,\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, care sunt conjugate două câte două (r_3 cu r_6 şi r_4 cu r_5). Soluţia generală a ecuaţiei date va fi

$$y(x) = C_0 + C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos\frac{1+\sqrt{5}}{2}x + C_4 \sin\frac{1+\sqrt{5}}{2}x +$$
$$+ C_5 \cos\frac{1-\sqrt{5}}{2}x + C_6 \sin\frac{1-\sqrt{5}}{2}x.$$

■ *Să se scrie soluţia generală a ecuaţiei*

$$y^{IV} - 3y^{\prime\prime\prime} + 5y^{\prime\prime} - 3y^{\prime} + 4y = 0$$

ştiind că admite două soluţii al căror produs este identic egal cu o constantă.

Indicaţie. În esenţă soluţiile unei ecuaţii ca aceasta sunt combinaţii liniare de funcţii de forma $x^k e^{rx}$. Două soluţii y_1 şi y_2 nu pot avea produsul identic egal cu o constantă decât dacă

$$y_1 = C_1 e^{r_1 x}, \quad y_2 = C_2 e^{r_2 x},$$

unde $r_1 + r_2 = 0$. Vom rezolva ecuaţia caracteristică

$$r^4 - 3r^3 + 5r^2 - 3r + 4 = 0$$

ţinând cont că două dintre rădăcini verifică relaţia $r_1 + r_2 = 0$.

Deducem apoi $r_3 + r_4 = 3,\ r_1 r_2 = 1\ şi\ r_3 r_4 = 4$, deci

$$r_{1,2} = \pm i,\ r_{3,4} = \frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei va fi

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^{\frac{3x}{2}} \cdot \left[C_3 \cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + C_4 \sin\frac{\sqrt{7}}{2}x \right].$$

█ *Să se scrie soluţia generală a ecuaţiei*

$$y^{\mathrm{IV}} + 2y^{///} + 3y^{//} + 2y^{/} + y = 0.$$

Indicaţie. Ecuaţia caracteristică este o ecuaţie reciprocă: $r^4 + 2r^3 + 3r^2 + 2r + 1 = 0$. Rădăcinile ei sunt

$$r_1 = r_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ şi } r_3 = r_4 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2},$$

deci soluţia generală a ecuaţiei este

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left[(C_1 + xC_2)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + (C_3 + C_4 x)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \right].$$

█ *Să se scrie soluţia generală a ecuaţiei*

$$y^{//} + y = \frac{1}{\cos x}.$$

Indicaţie. Ecuaţia caracteristică a ecuaţiei omogene ataşate este $r^2 + 1 = 0$, deci $r_{1,2} \pm i$ şi soluţia generală a ecuaţiei omogene este $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Pentru a găsi o soluţie y_0 pentru ecuaţia neomogenă dată, aplicăm metoda variaţiei constantelor, considerând $y_0(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$. Funcţiile $C_1(x)$ şi $C_2(x)$ se determină din sistemul

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2 \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases},$$

de unde rezultă $C_1' = -\dfrac{\sin x}{\cos x}$, adică $C_1(x) = \ln|\cos x|$, şi $C_2' = 1$ adică $C_2(x) = x$. Soluţia generală căutată este:

$$y(x) = \cos x \ln|\cos x| + x \sin x + C_1 \cos x + C_2 \sin x .$$

■ *Să se scrie soluţia generală a ecuaţiei*

$$y^{\mathrm{IV}} - 4y'' = 1.$$

Indicaţie. Ecuaţia omogenă are polinomul caracteristic $r^4 - 4r^2$ deci rădăcinile sunt $r_1 = r_2 = 0$, $r_3 = -2$, $r_4 = 2$. Soluţia generală a ecuaţiei omogene ataşate este

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-2x} + C_4 e^{2x} .$$

Pentru ecuaţia neomogenă, $f(x) = 1$ este un polinom de grad zero, deci nu are rost aplicarea metodei variaţiei constantelor, care necesită patru cuadraturi. Deoarece în ecuaţia dată lipseşte y şi y', vom căuta o soluţie particulară de forma $y_0(x) = Cx^2$.

Prin identificare se obţine $C = -1/8$. Soluţia generală căutată este :

$$y(x) = -\frac{1}{8} x^2 + C_1 + C_2 x + C_3 e^{-2x} + C_4 e^{2x} .$$

Acelaşi rezultat se obţine şi dacă vom considera $1 = e^{0x}$ şi ţinem cont că 0 este rădăcină dublă pentru polinomul caracteristic.

Să se scrie acea soluţie a ecuaţiei

$$y^{\mathrm{IV}} - y = x^3 + x$$

pentru care $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.

Indicaţie. Rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt $r_{1,2} = \pm 1$ şi $r_{3,4} = \pm i$, deci soluţia ecuaţiei omogene ataşate este

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x .$$

Suntem în cazul când $f(x) = x^3 + x$ este un polinom de grad trei, iar $a_n = 1 \neq 0$, deci căutăm o soluţie particulară de forma

$$y_0(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 .$$

Identificând coeficienţii obţinem $y_0(x) = -x^3 - x$, deci soluţia generală dată este :

$$y(x) = C_1(x) e^{x} + C_2\, e^{x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x^3 - x .$$

Pentru problema lui Cauchy deducem $C_1 = \frac{7}{4}$, $C_2 = -\frac{7}{4}$, $C_3 = 0$ şi $C_4 = -\frac{5}{2}$, deci obţinem

$$y(x) = \frac{7}{2}\,\mathrm{sh}\,x - \frac{5}{2}\sin x - x^3 - x .$$

Să se găsească o soluţie particulară a ecuaţiei

$$y^{\mathrm{V}} + y''' = x^2 e^{x} .$$

Indicaţie. $s = 1$ nu este rădăcină a polinomului caracteristic $r^5 + r^3$; vom căuta deci o soluţie de forma $y_0(x) = e^{x}\left(d_0 + d_1 x + d_2 x^2\right)$.

Identificând se obţine: $d_0 = \frac{19}{2}$, $d_1 = -4$, $d_2 = \frac{1}{2}$.

Să se scrie o soluţie particulară pentru ecuaţia

$$y^{\mathrm{IV}} - y^{\mathrm{III}} - y' + y = x e^{x} .$$

Indicaţie. $s=1$ este rădăcină a ecuaţiei caracteristice $r^4-r^3-r+1=0$, deci vom căuta o soluţie de forma $y_0(x)=x^2e^x(d_0+d_1x)$.

Identificând obţinem d_0 şi d_1.

■ *Să se scrie o soluţie particulară pentru ecuaţia*

$$y^{\mathrm{IV}}-16y=4e^{-2x}\cos 2x.$$

Indicaţie. Numărul $-2+2i$ nu este rădăcină a ecuaţiei carac-teristice $r^4-16=0$, deci căutăm soluţii de forma

$$y_0(x)=e^{-2x}(A\cos 2x+B\sin 2x).$$

Identificân obţinem $A=-1/20,\ B=0$.

■ *Să se găsească o soluţie particulară pentru ecuaţia*

$$y^{//}-4y^{/}+13y=e^{2x}\sin 3x.$$

Indicaţie. Numărul $2+3i$ este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, deci căutăm soluţia particulară de forma

$$y_0(x)=xe^{-2r}(A\cos 3x+B\sin 3x).$$

■ *Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei*

$$y^{//}-y^{/}+13y=x+e^x+e^{2x}.$$

Indicaţie. Soluţia generală a ecuaţiei omogene ataşate este $y(x)=C_1+C_2\,e^x$. Vom calcula apoi trei soluţii particulare y_1, y_2, y_3, respectiv pentru ecuaţiile neomogene

$$y^{//}-y^{/}=x,\quad y^{//}-y^{/}=e^x,\quad y^{//}-y^{/}=e^{2x}\ .$$

Acestea sunt $y_1=-x\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)$, $y_2=xe^x$ şi $y_3=\dfrac{1}{2}e^{2x}$.

Soluţia generală căutată este :

$$y(x)=y_0(x)+C_1+C_2\,e^x \quad \text{unde} \quad y_0=y_1+y_2+y_3.$$

■ *Să se scrie ecuaţia diferenţială liniară omogenă de ordin minim care admite ca soluţii particulare funcţiile* $y_1(x)=1,\ y_2(x)=x,\ y_3(x)=e^x,\ y_4=e^x\cos 2x$ *şi* $y_5(x)=e^x\sin 2x$.

Să se indice mai multe căi de rezolvare şi să se compare rezultatele.

Indicaţie. Putem scrie soluţia generală

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^x \cos 2x + C_5 e^x \sin 2x,$$

căci funcţiile date sunt liniar independente şi eliminăm constantele între această relaţie şi următoarele cinci derivate.

Putem scrie ecuaţia şi sub formă de determinant (care este de fapt rezultatul eliminării de mai sus):

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' & y_5' & y' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{\mathrm{V}} & y_2^{\mathrm{V}} & y_3^{\mathrm{V}} & y_4^{\mathrm{V}} & y_5^{\mathrm{V}} & y^{\mathrm{V}} \end{vmatrix} = 0.$$

Cel mai simplu este să scriem polinomul caracteristic care ar avea rădăcinile în aşa fel încât să obţinem soluţiile respective. Se vede că 0 este rădăcină dublă, 1 este rădăcină simplă, iar 1 + 2*i* şi 1 – 2*i* sunt rădăcini complexe conjugate, deci

$$P(r) = r^2(r-1)(r-1-2i)(r-1+2i) = r^5 - 3r^4 + 7r^3 - 5r^2.$$

Să se scrie soluţia generală a ecuaţiei

$$(x-1)^3 y''' + (x-1)y' - y = 0.$$

Indicaţie. Notând $x-1=u$, ecuaţia apare ca ecuaţie Euler. Putem face de la început substituţia $x-1=e^t$, sau putem căuta soluţii de forma $y(x)=(x-1)^r$. Soluţia căutată va fi

$$y(x) = (x-1)\left[C_1 + C_2 \ln(x-1) + C_3 \ln^2(x-1)\right].$$

Să se scrie acea soluţie a ecuaţiei

$$x^3 y^{\mathrm{III}} + 3x^2 y'' + xy' - y = x,$$

pentru care $y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$.

Indicaţie. Ecuaţia este de tip Euler, neomogenă. Facem schimbarea de variabilă $x=e^t$. Soluţia problemei este

$$y(x)=\frac{x(\ln x-1)}{3}+\frac{\sqrt{3}}{9\sqrt{x}}\left[\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)+\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right].$$

Să se scrie soluţia generală a ecuaţiei

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0, \quad n \in \mathrm{IN},$$

făcând schimbarea de variabilă $x=\cos t$.

Indicaţie. Obţinem ecuaţia liniară cu coeficienţi constanţi $z'' - n^2 z = 0$, unde $z(t) = y(\cos t)$, care are soluţia generală $z(t) = C_1 e^{nt} + C_2 e^{-nt}$, deci $y(x) = C_1\, e^{n \arccos x} + C_2\, e^{-n \arccos x}$.

CAPITOLUL III

SISTEME DE ECUAŢII DIFERENŢIALE

§III. 1. Sisteme de ecuaţii diferenţiale în forma generală

Unele consideraţii de ordin foarte general asupra sistemelor de ecuaţii diferenţiale au fost făcute în primul capitol, în paragraful introductiv. La începutul acestui paragraf vom relua toate noţiunile privind sistemele de ecuaţii diferenţiale, făcând precizările necesare.

*Numim **sistem de ecuaţii diferenţiale** orice set de ecuaţii diferenţiale care se cere să fie satisfăcute concomitent.*

Forma generală a unui sistem este de obicei implicită, adică

$$\begin{cases} F_1\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(p_1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots y_n^{(p_n)}\right) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(\omega_1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots y_n^{(\omega_n)}\right) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Ordinul sistemului se consideră egal cu produsul ordinelor ecuaţiilor. Printr-o **soluţie** a sistemului (1) se înţelege un ansamblu de *n* funcţii, scris de obicei matricial

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \tag{2}$$

care înlocuite în ecuaţiile (1) le verifică identic.

Prin **problema lui Cauchy** pentru sistemul (1) se înţelege determinarea acelei soluţii Y, pentru care se impun condiţiile

$$y_1(x_0) = y_1^0, \quad y_1^{/}(x_0) = y_1^1 \dots y_1^{(p_1-1)}(x_0) = y_1^{p_1-1}$$

....

$$y_n(x_0) = y_n^0, \quad y_n^{/}(x_0) = y_n^1 \dots y_n^{(p_n-1)}(x_0) = y_n^{p_n-1}.$$

Spunem despre două sisteme că sunt **echivalente** dacă ele au aceleaşi soluţii, sau dacă se deduc unele din altele.

Ca şi în cazul ecuaţiilor diferenţiale, problema fundamentală care se pune în legătură cu sistemele de ecuaţii diferenţiale este aceea a rezolvării, adică a scrierii tuturor soluţiilor.

Pentru probleme concrete ale practicii este suficient în general cunoaşterea soluţiei pentru o problemă a lui Cauchy. Din punct de vedere geometric, o soluţie se reprezintă ca o curbă în spaţiul $\mathrm{IR} \times \mathrm{IR}^n$, al variabilelor x şi $y_1, \dots, y_n$, deci rezolvarea unei probleme a lui Cauchy constă în identificarea acelei curbe-soluţie, care trece printr-un punct şi are tangenta cunoscută, respectiv variaţiile tangentei cunoscute.

În acest scop se foloseşte procedeul scrierii de sisteme echiva-lente cu sistemul dat. Proprietatea de echivalenţă stabilită în propo-ziţia ce urmează justifică interesul deosebit ce se acordă sistemelor de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi.

Orice sistem de ecuaţii diferenţiale este echivalent cu un sistem de ordinul întâi.

Un sistem de ecuaţii diferenţiale de forma

$$\begin{cases} y_1^{/} = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_2^{/} = f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n^{/} = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \tag{3}$$

se numeşte sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi în formă ***explicită. Condiţiile Cauchy*** *pentru sistemul* (3) *au forma*

$$y_1(x_0) = y_1^0, \quad y_2(x_0) = y_2^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0, \tag{4}$$

iar ***soluţia generală*** *depinde de n constante arbitrare şi permite rezolvarea oricărei probleme Cauchy.*

Am văzut pe tot parcursul capitolelor I şi II că una din problemele de principiu, care intervine mereu atât sub aspect teoretic cât şi practic, este aceea a existenţei şi unicităţii soluţiei pentru o problemă Cauchy.

Vom schiţa în continuare cum se poate rezolva această problemă pentru sistemele de ecuaţii (3), care am văzut că înglobează prin forma lor generală toate ecuaţiile diferenţiale explicite discutate în capitolele I şi II, precum şi sistemele de ecuaţii diferenţiale ordinare.

Deoarece în această teoremă vom folosi condiţia Lipschitz, amintim că o funcţie $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ se zice că este lipschitziană în raport cu variabilele $y_1, \ldots, y_n$ dacă există constantele $A_1, \ldots, A_n$ pozitive, astfel încât pentru orice pereche de puncte $\left(x, y_1^1, \ldots, y_n^1\right)$, $\left(x, y_1^2, \ldots, y_n^2\right)$ să avem $\left| f\left(x, y_1^1, \ldots, y_n^1\right) - f\left(x, y_1^2, \ldots, y_n^2\right)\right| \leq A_1\left| y_1^1 - y_1^2\right| + \ldots + A_n\left|y_n^1 - y_n^2\right|$.

Să considerăm un sistem (3) şi condiţiile Cauchy (4). *Dacă într-un paralelipiped P cu centrul în* $\left(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0\right)$,

$P = \left\{(x, y_1, \ldots, y_n) \,\middle|\, |x - x_0| \leq a,\ \left|y_1 - y_1^0\right| \leq b_1, \ldots, \left|y_n - y_n^0\right| \leq b_n\right\}$

sunt satisfăcute condiţiile

a) *Funcţiile* $f_1, \ldots, f_n$ *sunt continue în raport cu ansamblul variabilelor.*

b) *Funcţiile* $f_1, \ldots, f_n$ *sunt lipschitziene în raport cu* $y_1, \ldots, y_n$, *atunci problema lui Cauchy admite o soluţie şi aceasta este unică pe intervalul* $I = \left\{x \,\middle|\, |x - x_0| < h\right\}$, *unde*

$$h = \min\left\{ a, \frac{b_1}{M}, \ldots, \frac{b_n}{M}\right\} \quad \text{şi} \quad M = \sup_{P,\, i}\left| f_i(x, y_1, \ldots, y_n)\right|.$$

(Teorema de existenţă şi unicitate Peano - Lipschitz - Cauchy)

Teorema de existenţă şi unicitate a soluţiei problemei lui Cauchy (4) pentru sistemul (3) are în primul rând o însemnătate teoretică, dar este deseori utilă în practică, atunci când nu se poate scrie soluţia exactă a problemei. Menţionăm că în aplicaţii este utilă problema de evaluare a erori.

Formula de evaluare a erorii aproximaţiei de ordinul m este

$$\left| y_i(x) - y_i^m(x) \right| \le k \cdot \left[e^{Ah} - 1 - \frac{Ah}{1!} - \ldots - \frac{(Ah)^{m-1}}{(m-1)!} \right], \text{ unde}$$

$A = A_1 + \ldots + A_n$, iar

$$k = \sup\left\{ \left| y_i^1(x) - y_i^0 \right| \;\middle|\; \left| x - x_0 \right| < h,\ i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Sunt foarte puţine cazurile cand se poate scrie exact soluţia unui sistem de forma (3). Vom discuta în continuare metoda de rezolvare a sistemelor scrise în formă simetrică, pentru care vom folosi noţiunea de integrală primă. Această noţiune apare în unele consecinţe ale teoremei de existenţă şi unicitate.

Funcţiile

$$F_i(x, y_1, \ldots, y_n) = C_i, \quad i = 1, \ldots, n \qquad (5)$$

obţinite prin explicitarea constantelor $C_1, \ldots, C_n$ *din formulele* $y_i(x) = \varphi_i\left(x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0\right)$, $i = 1, \ldots, n$, *se numesc* ***integrale prime*** *ale sistemului* (3).

În principiu, dacă pe o anume cale, putem obţine n integrale prime pentru sistemul (3), se poate considera că am rezolvat acest sistem, adică avem o soluţie generală. Într-adevăr, presupunând că din formulele (6) putem explicita pe $y_1, \ldots, y_n$, se obţin soluţiile de forma

$$y_i(x) = \tau_i(x, C_1, \ldots, C_n), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (6)$$

Este de reţinut că prin integralele prime se înţeleg relaţiile între $x, y_1, \ldots, y_n$, de forma (5), care se verifică identic atunci numai atunci când $y_1, \ldots, y_n$ sunt soluţii ale sistemului (3).

Numim sistem de ecuaţii diferenţiale în ***formă simetrică,*** *orice sistem de forma*

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,\dots,x_n)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1,\dots,x_n)}=\dots=\frac{dx_n}{X_n(x_1,\dots,x_n)} \quad (7)$$

Orice sistem de ecuaţii diferenţiale de forma (3) *este echivalent cu un sistem în formă simetrică* (7).

O condiţie necesară şi suficientă pentru scrierea soluţiei generale a sistemului (7) *este cunoaşterea a* $n-1$ *integrale prime ale acestui sistem.*

Numim ***combinaţie integrabilă*** *pentru sistemul* (7) *orice ansamblu de funcţii*

$$\mu_1(x_1,x_2,\dots,x_n),\dots,\mu_n(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

pentru care:

$$\mu_1X_1+\mu_2X_2+\dots+\mu_nX_n=0$$

$$\mu_1dx_1+\mu_2dx_2+\dots+\mu_ndx_n=dF\,. \quad (8)$$

Cu alte cuvinte, combinaţia integrală este un sistem de funcţii cu care dacă amplificăm fracţiile din sistemul (7), suma numitori-lor este o diferenţă totală exactă. Vom arăta acum importanţa com-binaţiilor integrabile pentru rezolvarea sistemelor de forma (7).

Dacă $\mu_1,\dots,\mu_n$ *este o combinaţie integrabilă pentru sistemul* (7), *atunci F, pentru care are loc formula* (8), *este o integrală primă a sistemului.*

Pentru a integra un sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare în forma generală (1) *procedăm astfel*:

a) *Scriem sistemul de ordinul întâi, cu care acesta este echivalent şi studiem dacă acest sistem,* (3), *are soluţie.*

b) *Scriem sistemul în forma simetrică*

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy_1}{f_1}=\dots=\frac{dy_n}{f_n} \quad (9)$$

cu care sistemul (3) *este echivalent.*

c) *Căutăm n combinaţii integrabile pentru sistemul* (9) *şi calculăm cele n integrale prime corespunzătoare.*

Desigur, dacă explicitarea este posibilă, scriem soluţia (6), dacă nu, rezolvarea unei probleme Cauchy se face direct în formulele (5) ale integralelor prime.

Probleme §III.1

■ *Ce relaţii există între condiţia lui Lipschitz şi proprietatea de continuitate*? *Să se arate că dacă o funcţie* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *are derivate parţiale continue în raport cu variabilele* $x_1, x_2, \dots, x_n$, *atunci ea satisface condiţia lui Lipschitz. Să se studieze dacă următoarele funcţii sunt lipschitziene*:

$$a)\quad f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2-y^2}\,, & x^2+y^2\le 1\\ 0\,, & x^2+y^2>1.\end{cases}$$

$$b)\quad f(x,y)=\begin{cases}e^{\frac{-1}{1-\left(x^2+y^2\right)}}\,, & x^2+y^2\le 1\\ 0\,, & x^2+y^2>1.\end{cases}$$

Indicaţie. Orice funcţie lipschitziană este continuă, dar nu şi invers, aşa cum se vede în cazul *a*). Să presupunem că *f* are derivate parţiale continue în punctul $\left(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0\right)$. Atunci aplicând formula creşterilor finite, găsim:

$$\left| f(x_1,\dots,x_n)-f(x_1^0,\dots,x_n^0)\right|\le\left| f(x_1,\dots,x_n)-f(x_1^0,\dots,x_n)\right|+$$
$$+\left| f(x_1^0,\dots,x_n)-f(x_1^0,\dots,x_n)\right|+\dots+\left| f(x_1^0,\dots,x_{n-1}^0,x_n)-\right.$$
$$\left.-f(x_1^0,\dots,x_n^0)\right|\le\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|\cdot\left|x_1-x_1^0\right|+\dots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|\cdot\left|x_n-x_n^0\right|.$$

Funcţia din cazul *b*) este lipschitziană în tot planul, căci are derivate parţiale şi sunt continue peste tot.

█ *Să se scrie primele trei aproximaţii ale soluţiei ecuaţiei* $y' = xy$ *care satisface problema Cauchy* $y(0)=1$ *în domeniul* $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|\le\frac{1}{2},\ |y-1|\le 1\right\}$. *Să se compare soluţia exactă şi să se evalueze eroarea.*

Indicaţie. $y_3(x)=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{48}$. Pentru eroarea acestei aproximaţii avem $\varepsilon_3\le\frac{1}{3072}$. Soluţia exactă a problemei lui Cauchy este $y=e^{\frac{x^2}{2}}$.

█ *Să se scrie aproximaţia de ordinul doi pentru soluţia sistemului*:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x + yz \\ \dfrac{dz}{dx} = x^2 - y^2, \end{cases}$$

care satisface problema lui Cauchy $y(0)=1,\ z(0)=0$.

Indicaţie. $y^2(x)=1-\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{36},\ z^2(x)=-x-\frac{x^5}{20}$.

█ *Să se integreze sistemul de ecuaţii diferenţiale*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-z}{z-y} \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{y-x}{z-y}, \end{cases}$$

scriindu-l în formă simetrică. Ce curbe sunt soluţiile particulare ? Să se rezolve problema lui Cauchy $y(1)=0,\ z(1)=0$.

Indicaţie. În forma simetrică sistemul dat se scrie

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}.$$

O combinaţie integrabilă este $\mu_1=\mu_2=\mu_3=1$, pentru care obţinem $dx+dy+dz=0$, adică $x+y+z=C_1$. O altă combinaţie integrabilă este $\lambda_1=x,\ \lambda_2=y,\ \lambda_3=z$. Pentru aceasta se obţine $xdx+ydy+zdz=0$, deci $x^2+y^2+z^2=C_2$. Se vede că soluţiile particulare se obţin intersectând plane cu sfere, deci sunt cercuri.

Dacă înlocuim $x=1, y=0, z=0$, se obţine $C_1=1$, $C_2=1$, deci soluţia problemei lui Cauchy este cercul

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=1. \end{cases}$$

■ *Să se integreze sistemul*

$$\frac{dx}{2y(2-x)}=\frac{dy}{x^2+z^2-y^2-4x}=-\frac{dz}{2zy}.$$

Indicaţie. O integrală primă se obţine egalând primul raport cu ultimul, anume $\frac{x-2}{z}=C_1$.

O a doua integrală primă se poate obţine cu combinaţia integrabilă $\mu_1=x-2,\ \mu_2=y,\ \mu_3=-z$.

Aceasta este $\frac{(x-2)^2+y^2+z^2+4}{z}=C_2$.

§III.2. Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare

Sistemele de ecuaţii diferenţiale liniare reprezintă un caz particular pentru sistemele de ecuaţii diferenţiale, pentru care s-a dezvoltat o teorie matematică amplă, similară teoriei ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordin superior.

Sistemul

$$\begin{cases} y_1' + a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n = f_1(x) \\ y_2' + a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n = f_2(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' + a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n = f_n(x), \end{cases} \qquad (1)$$

unde $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$ *şi* $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ *sunt funcţii continue pe un segment* $[a, b]$, *se numeşte* ***sistem de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi.*** *Dacă în sistemul* (1) *avem* $f_1(x) \equiv \ldots \equiv f_n(x) \equiv 0$, *spunem că sistemul este* ***omogen.***

Fiind dat un sistem de forma (1), *neomogen, sistemul*

$$\begin{cases} y_1' + a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' + a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

se numeşte ***sistemul omogen ataşat*** *sistemului* (1).

Pentru simplificarea scrierii se introduce notaţia matricială. Funcţiile necunoscute formează matricea

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

numită **matricea funcţiilor necunoscute.** Funcţiile $f_1, \ldots, f_n$ formează matricea

$$F(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

numită **matricea părţii neomogene (perturbatoare).**

Coeficienţii $a_{ij}(x)$, $i, j=1,\dots,n$ formează **matricea sistemului**, notată

$$A(x)=\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2} & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

Notăm cu $L: \mathcal{M}^{1}_{n,1}[a,b] \to \mathcal{M}_{n,1}[a,b]$, **operatorul diferenţial liniar** care ataşează fiecărei matrici cu *n* linii şi o coloană, formată cu funcţii cu derivată continuă, o matrice tot cu *n* linii şi o coloană, formată din funcţii continue, definit prin formula

$$L(Y)=Y^{/}+AY. \qquad (3)$$

Ca de obicei (şi conform proprietăţilor matricilor), am notat

$$Y^{/}(x)=\begin{pmatrix} y_1^{/}(x) \\ y_2^{/}(x) \\ \vdots \\ y_n^{/}(x) \end{pmatrix}.$$

Se constată uşor că operatorul L este într-adevăr liniar, adică $L(C_1Y_1+C_2Y_2)=C_1L(Y_1)+C_2L(Y_2)$, oricare ar fi constantele C_1 şi C_2.

Cu ajutorul operatorului L sistemul (1) se scrie $L(y)=F$ $(1^{/})$, iar sistemul (2) se scrie $L(y)=0$ $(2^{/})$.

Folosind teorema de existenţă şi unicitate, se arată uşor că orice problemă a lui Cauchy

$$y_1(x_0) = y_1^0\,,\ \ldots\ ,\ y_n(x_0) = y_n^0\,, \quad (x_0 \in [a, b])\,, \quad (4)$$

are soluţie şi aceasta este unică. Condiţia Cauchy se scrie matricial prin formula

$$Y(x_0) = Y^0 \equiv \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix}.$$

Soluţia generală a sistemului $(1^/)$ *este suma dintre o soluţie particulară a acestuia şi soluţia generală a sistemului omogen ataşat.*

Din cele discutate mai sus rezultă că pentru sistemele de forma $(1^/)$ se pun două probleme:

1° Determinarea soluţiei generale a sistemului omogen ataşat.

2° Determinarea unei soluţii particulare a sistemului neomo-gen.

Pentru a rezolva prima problemă vom folosi noţiunea de dependenţă liniară a soluţiilor, care se înţelege în sensul spaţiului de matrici $\mathcal{M}_{n,1}([a,b])$.

Se obişnuieşte ca un sistem de *n* soluţii liniar independente pentru un sistem de forma $(1^/)$ sau $(2^/)$ să fie numit **sistem fundamental** de soluţii.

O condiţie necesară şi suficientă ca n matrici coloană

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_1^1 \\ \vdots \\ y_n^1 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} y_1^2 \\ \vdots \\ y_n^2 \end{pmatrix}, \ \ldots\ , \quad Y_n = \begin{pmatrix} y_1^n \\ \vdots \\ y_n^n \end{pmatrix}$$

să fie liniar dependente (*pe segmentul* [*a*, *b*]) *este ca determinantul acestora să fie identic nul*

$$\Delta(Y_1, \dots, Y_n) = \begin{vmatrix} y_1^1 & y_1^2 & \dots & y_1^n \\ y_2^1 & y_2^2 & \dots & y_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1 & y_n^2 & \dots & y_n^n \end{vmatrix} = 0 .$$

Dacă determinantul $\Delta(Y_1, \dots, Y_n)$ *a n soluţii pentru sistemul* $(2^/)$ *este diferit de zero într-un punct* $x_0 \in [a, b]$*, atunci el este diferit de zero pe tot segmentul* [*a, b*] (*Teorema Abel – Ostrogradski – Liouville*) .

O condiţie necesară şi suficientă ca să putem rezolva orice problemă Cauchy, (4) , *pentru sistemul* $(2^/)$*, este să cunoaştem un sistem de n soluţii liniar independente pe* $[a, b]$ *pentru acest sistem.*

În practică este utilă reducerea numărului de ecuaţii şi de funcţii necunoscute atunci când se cunosc câteva soluţii particulare.

Fie $Y_1, \dots, Y_n$ *un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul* $(2^/)$ *şi fie* $\overline{Y_1}, \dots, \overline{Y_n}$ *un nou sistem de soluţii, care se obţine din primul, prin transformarea*

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} Y_j \ , \qquad i = 1, \dots, n .$$

O condiţie necesară şi suficientă ca $\overline{Y_1}, \dots, \overline{Y_n}$ *să fie un sistem fundamental pentru sistemul* $(2^/)$ *este ca determinantul matricei de transformare să fie diferit de zero,* $|C| = |C_{ij}| \neq 0$.

Dacă pentru un sistem omogen de ecuaţii diferenţile liniare, $(2^/)$*, cunoaştem s soluţii liniar independente* $Y_1, \dots, Y_s$, $(s < n)$, *integrarea sistemului se reduce la integrarea unui sistem cu* $n - s$ *ecuaţii liniare, omogene cu* $n - s$ *funcţii necunoscute.*

Să considerăm acum schimbarea de funcţii

$$Y = \begin{pmatrix} y_1^1 & \dots & y_1^s & & & \\ \vdots & \delta & \vdots & & 0 & \\ y_s^1 & \dots & y_s^s & & & \\ y_{s+1}^1 & \dots & y_{s+1}^s & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & I & \vdots \\ y_n^1 & \dots & y_n^1 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot Z . \qquad (5)$$

Vom arăta acum că dacă prima problemă formulată mai sus este rezolvată, adică cunoaştem soluţia generală a sistemului omogen $(2^/)$, atunci întotdeauna putem găsi o soluţie particulară a sistemului omogen $(1^/)$. În acest scop vom aplica metoda variaţiei constantelor.

Metoda variaţiei constantelor. *Dacă în expresia* $Y = C_1Y_1 + ... + C_nY_n$ *a soluţiei generale pentru sistemul* $(2^/)$ *înlocuim constantele* $C_1, ..., C_n$ *cu funcţii* $C_1(x), ..., C_n(x)$, *putem determina aceste funcţii astfel încât sistemul de funcţii*

$$Y_0 = C_1(x)Y_1 + ... + C_n(x)Y_n$$

să fie soluţie a sistemului neomogen $(1^/)$.

Pentru a integra un sistem de forma $(1^/)$, *căutăm mai întâi soluţia generală* $Y = C_1Y_1 + ... + C_nY_n$ *a sistemului omogen ataşat* $(2^/)$. *Pentru aceasta avem nevoie de n soluţii liniar independente* $Y_1, ..., Y_n$, *în calculul cărora putem folosi pe parcurs, eventual, reducerea numărului de ecuaţii când se cunosc s soluţii. Calculăm apoi o soluţie particulară* Y_0 *pentru sistemul neomogen cu metoda variaţiei constantelor, sau prin încercări, în funcţie de forma funcţiilor din matricea F. Soluţia generală căutată va fi*

$$Y = Y_0 + C_1Y_1 + ... + C_nY_n .$$

Vom discuta în continuare sistemele de ecuaţii de forma $(1')$ în care coeficienţii a_{ij}, $i, j = 1, \dots, n$ sunt constante (reale sau complexe). Faţă de cazul general, vom arăta că se pot rezolva următoarele probleme: determinarea soluţiei generale pentru sistemul omogen ataşat şi determinarea unei soluţi particulare pentru sistemul neomogen în câteva cazuri particulare pentru matricea *F* (partea neomogenă).

Să considerăm că în sistemul $(1')$ *elementele matricii A sunt constante. Polinomul* $P(r) = |A + rI|$ *se numeşte* ***polinomul caracteristic*** *al sistemului* $(1')$. *Ecuaţia* $P(r) = 0$ *se numeşte* ***ecuaţia caracteristică*** *a sistemului* $(1')$, *iar rădăcinile ei se numesc* ***numere caracteristice*** *sau* ***valori proprii*** *ale matricii A, respectiv ale sistemelor* $(1')$ *sau* $(2')$. *Ecuaţia diferenţială liniară de ordinul n, omogenă, a cărui polinom caracteristic coincide cu polinomul caracteristic P al sistemului* $(1')$ *sau* $(2')$, *se numeşte* ***ecuaţia diferenţială liniară de ordinul n ataşată sistemului.***

Fiecare componentă $y_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, *a oricărei soluţii*

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

pentru sistemul de ecuaţii $(2')$ *este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale liniare* (*omogene*) *de ordin n ataşate sistemului* $(2')$

Se constată uşor că nu orice sistem de funcţii

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

în care $y_1, \dots, y_n$ sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale de ordin *n* ataşate sistemului, este o soluţie a sistemului $(2')$. Totuşi cunoaşterea unei componente, de exemplu y_1, în soluţia Y, conduce la scrierea soluţiei în întregime, operaţie care se poate face pe mai multe căi.

Metoda I. (*pentru rezolvarea sistemelor omogene* $(2')$).

Pentru fiecare soluţie $y = e^{rx}$, a ecuaţiei diferenţiale de ordin *n* ataşate, identificăm constantele $C_1, ..., C_n$ astfel încât

$$Y = \begin{pmatrix} C_1 e^{rx} \\ C_2 e^{rx} \\ \vdots \\ C_n e^{rx} \end{pmatrix}$$

să fie soluţie a sistemului $(2')$, iar pentru fiecare soluţie $y = x^k e^{rx}$, identificăm polinoamele $Q_1, ..., Q_n$ de grad *k*, încât

$$Y = \begin{pmatrix} Q_1 e^{rx} \\ Q_2 e^{rx} \\ \vdots \\ Q_n e^{rx} \end{pmatrix}$$

să fie soluţie a sistemului $(2')$. Evident putem lua $C_1 = 1$ şi respectiv $Q_1(x) = x^k$, altfel coeficienţii căutaţi nu sunt unic determinaţi.

Dacă coeficienţii a_{ij}, $i, j = 1, ..., n$ sunt reali, coeficienţii polinomului caracteristic al sistemului $(2')$ vor fi de asemenea reali. În acest caz dacă $r = s + i\omega$ este rădăcină a polinomului caracteristic, $\overline{r} = s - i\omega$ va fi de asemenea rădăcină.

Soluţia Y generată de rădăcina r va fi

$$Y=\begin{pmatrix} e^{(s+i\omega)x}Q_1(x) \\ \vdots \\ e^{(s+i\omega)x}Q_n(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{sx}(S_1\cos\omega x+iT_1\sin\omega x) \\ \vdots \\ e^{sx}(S_n\cos\omega x+iT_n\sin\omega x) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} e^{sx}S_1\cos\omega x \\ \vdots \\ e^{sx}S_n\cos\omega x \end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} e^{sx}T_1\sin\omega x \\ \vdots \\ e^{sx}T_n\sin\omega x \end{pmatrix}=U+iV\ ,$$

iar soluţia generală de $\overline{r}$ va fi $\overline{Y}=U-iV$. Dacă trecem de la un sistem fundamental $Y_1=Y$, $Y_2=\overline{Y}$, $Y_3,\dots,Y_n$, ..., $Z_n=Y_n$, la sistemul $Z_1=U$, $Z_3=Y_3$ matricea de trecere este nesingulară, deci se obţine un nou sistem fundamental. În acest caz putem scrie soluţiile reale folosind rădăcinile complexe conjugate ale polinomului caracteristic (cazul rădăcinilor complexe simple se obţine prin particularizarea polinoamelor Q_i, S_i,T_i, $i=1,\dots,n$, la constante).

Metoda II. (*funcţii de matrice*). Se poate arăta că oricare ar fi o matrice pătratică *A*, seria matricială

$$I-\frac{Ax}{1!}+\frac{A^2x^2}{2!}+\dots+(-1)^{m-1}\frac{A^mx^m}{m!}+\dots.$$

este convergentă, iar suma ei se notează e^{-Ax}. Se constată apoi că $\left(e^{-Ax}\right)'=-A\cdot\left(e^{-Ax}\right)$, deci oricare ar fi o matrice constantă

$$\mathrm{C}=\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix},$$

matricea $Y=e^{-Ax}\mathrm{C}$ este o soluţie a sistemului $(2^{/})$. Particulari-zând matricea C la valori de forma

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \dots,\quad \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

se observă că un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul $(2^{/})$ este format tocmai din coloanele matricei e^{-Ax}.

Din punct de vedere practic rămâne de precizat cum se poate calcula funcţia de matrice e^{-Ax} şi altfel decât cu seria ce o defineşte. Menţionăm că o metodă simplă este aceea de a scrie un polinom $g(z)$, de matricea $-Ax$, în locul exponenţialei, cu condiţia ca polinomul să coincidă cu exponenţiala e^{-zx} pe spectrul matricei A. Aceasta înseamnă că se calculează valorile proprii ale matricei A, anume $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, multiple de ordine $m_1, \dots, m_k$, apoi se scrie polinomul $g(z)$, care în punctele $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ are aceleaşi valori ca şi exponenţiala e^{-zx}, împreună cu derivatele sale până la ordinele $m_1 - 1, \dots, m_k - 1$.

Pentru rezolvarea sistemelor neomogene să considerăm că în sistemul (1) (*respectiv* $(1^{/})$) *avem*

$$f_1(x) = P_1(x), \dots, f_n(x) = P_n(x),$$

unde $P_1, \dots, P_n$ *sunt polinoame de grad cel mult m în x. Dacă r* = 0 *este rădăcină multiplă de ordinul p pentru polinomul caracteristic P*(*r*) *al sistemului* (1)*, atunci o soluţie particulară pentru acest sistem are forma*

$$Y_0 = \begin{pmatrix} Q_1(x) \\ \vdots \\ Q_n(x) \end{pmatrix}$$

unde $Q_1, \dots, Q_n$ *sunt polinoame de grad cel mult* $m + p$*, ai căror coeficienţi se identifică prin înlocuirea lui* Y_0 *în sistem.*

Să presupunem că în sistemul (1), *respectiv* $(1^{/})$, *avem*

$$f_1(x) = e^{\alpha x} P_1(x)\,, \ldots,\ f_n(x) = e^{\alpha x} P_n(x)\,,$$

unde $P_1, \ldots, P_n$ *sunt polinoame de grad cel mult m în x. Dacă* $r = \alpha$ *este o rădăcină multiplă de ordinul p pentru polinomul caracteris-tic al sistemului* $(1^{/})$*, atunci o soluţie particulară a acestui sistem are forma*

$$Y_0(x) = \begin{pmatrix} Q_1(x)e^{\alpha x} \\ \vdots \\ Q_n(x)e^{\alpha x} \end{pmatrix}$$

unde $Q_1, \ldots, Q_n$ *sunt polinoame de grad* $m+p$ *şi ai căror coefici-enţi se determină prin înlocuirea lui* Y_0 *în sistem.*

Ca şi în cazul ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordin superior, forma cea mai generală a părţii neomogene este

$$f_i(x) = e^{\alpha x}\left(P_i(x)\cos \omega x + Q_i(x)\sin \omega x\right), \quad i = 1, \ldots, n$$

unde P_i şi Q_i sunt polinoame de grad cel mult m în x. Din cele discutate mai sus rezultă că în acest caz vom căuta o soluţie particulară de forma

$$Y_0 = \begin{pmatrix} e^{\alpha x} \cdot \left(T_1(x)\cos \omega x + S_1(x)\sin \omega x\right) \\ \vdots \\ e^{\alpha x} \cdot \left(T_n(x)\cos \omega x + S_n(x)\sin \omega x\right) \end{pmatrix}$$

unde $T_1, T_2, \ldots, T_n$ şi $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sunt polinoame de grad $m+p$, p fiind ordinul de multiplicitate al rădăcinii $\alpha + i\omega$ pentru polinomul caracteristic al sistemului dat.

Dacă partea neomogenă este o sumă de termeni de formele studiate mai sus, vom căuta soluţia particulară Y_0 ca o sumă de soluţii de formele precizate pentru fiecare caz.

Probleme §III.2

■ *Se consideră sistemul*

$$\begin{cases} y' - \dfrac{2x}{1+x^2}\cdot y = \alpha(x) \\ z' - y + \dfrac{1}{x}\cdot z = x \end{cases}, \quad x \neq 0,$$

şi se cere:

a) *Să se scrie două soluţii particulare liniar independente pentru sistemul omogen ataşat.*

b) *Să se scrie o soluţie particulară a sistemului dat,* (*neomogen*) *folosind metoda variaţiei constantelor, pentru* $\alpha(x)=0$ *şi* $\alpha(x)=x$.

c) *Să se scrie soluţia sistemului dat pentru care avem* $y(1)=2$, $z(1)=1$, *în cazul* $\alpha(x)=0$.

Indicaţie. *a*) Sistemul omogen ataşat se poate integra începând cu prima ecuaţie, deoarece aceasta nu conţine pe z. Obţinem $y = C_1(1+x^2)$ şi $z = C_1\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^3}{4}\right)+C_2\dfrac{1}{x}$. Soluţia generală se poate scrie sub forma $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = C_1Y_1 + C_2Y_2$, unde

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1+x^2 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{x^3}{4} \end{pmatrix} \text{ şi } Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{x} \end{pmatrix}.$$

Aceste două soluţii sunt liniar independente deoarece

$$\Delta\left(Y_1, Y_2\right) = \frac{1}{x}(1+x^2) \neq 0.$$

b) Căutăm o soluţie particulară de forma

$$Y_0 = C_1(x)\cdot\begin{pmatrix} 1+x^2 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{x^3}{4} \end{pmatrix} + C_2(x)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{x} \end{pmatrix},$$

în cazul $\alpha(x)=0$ găsim $C_1(x)=0$, $C_2(x)=\dfrac{x^3}{3}$, deci $Y_0=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{x^2}{3}\end{pmatrix}$, iar în cazul $\alpha(x)=x$ găsim $C_1(x)=\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$ *şi*

$C_2(x)=-x^4+\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

c) Determinăm constantele c_1 şi c_2 în soluţia generală

$$Y(x)=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{x^2}{2}\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}1+x^2\\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{x^3}{4}\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{1}{x}\end{pmatrix}$$

încât să fie verificate condiţiile Cauchy date. Obţinem

$$C_1=1,\quad C_2=-\frac{1}{12}.$$

█ *Să se scrie sistemul de ecuaţii diferenţiale liniare care admite soluţiile particulare*

$$Y_1=\begin{pmatrix}\cos 2x\\ \sin 2x\end{pmatrix}\quad şi\quad Y_2=\begin{pmatrix}-\sin 2x\\ \cos 2x\end{pmatrix}.$$

Indicaţie. Dacă, în general, cunoaştem *n* matrici liniar independente,

$$Y_1=\begin{pmatrix}y_1^1\\ \vdots\\ y_n^1\end{pmatrix},\quad Y_2=\begin{pmatrix}y_1^2\\ \vdots\\ y_n^2\end{pmatrix},\ \dots,\ Y_n=\begin{pmatrix}y_1^n\\ \vdots\\ y_n^n\end{pmatrix},$$

sistemul de ecuaţii diferenţiale liniare care le admite drept soluţii se scrie sub forma

$$\begin{vmatrix}y_i' & y_i^{1\,\prime} & y_i^{2\,\prime} & \dots & y_i^{n\,\prime}\\ y_1 & y_1^1 & y_1^2 & \dots & y_1^n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ y_n & y_n^1 & y_n^2 & \dots & y_n^n\end{vmatrix}=0,\quad i=1,\dots,n.$$

În cazul nostru se obţine sistemul

$$\begin{cases} y_1' = 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 \end{cases}.$$

■ *Să se integreze sistemul*

$$\begin{cases} y_1' - 10y_1 + 3y_2 + 9y_3 = 0 \\ y_2' + 18y_1 - 7y_2 - 18y_3 = 0 \\ y_3' - 18y_1 + 6y_2 + 17y_3 = 0 \end{cases}$$

ştiind că admite două soluţii particulare

$$Y_1 = \begin{pmatrix} e^{-2x} \\ -2e^{-2x} \\ 2e^{-2x} \end{pmatrix} \quad şi \quad Y_2 = \begin{pmatrix} e^{x} \\ 3e^{x} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Indicaţie. Se face schimbarea de funcţii

$$Y = \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{x} & 0 \\ -2e^{-2x} & 3e^{x} & 0 \\ 2e^{-2x} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot Z.$$

Se obţine $z_3' - z_3 = 0$, deci $z_3 = e^{x}$, apoi $z_1 = -3e^{3x}$ şi $z_2 = 0$.

Revenind găsim $Y_3 = \begin{pmatrix} -3e^{x} \\ 6e^{x} \\ -5e^{x} \end{pmatrix}$.

■ *Să se determine o soluţie particulară a sistemului*

$$\begin{cases} x' + x + z = t \\ y' + 2x = t + 1 \\ z' = t - 1 \end{cases}$$

folosind forma particulară a părţii neomogene şi să se verifice rezultatul. Admite sistemul o soluţie de forma

$$\overline{Y_0} = \begin{pmatrix} x^2 Q_1 \\ x^2 Q_2 \\ x^2 Q_3 \end{pmatrix}$$

unde Q_1, Q_2 *şi* Q_3 *sunt polinoame de grad* 1?

Indicaţie. Polinomul caracteristic al sistemului este

$$P(r) = r^2(r+1),$$

deci $r = 0$ este rădăcină dublă. Cum gradul polinoamelor din partea neomogenă este 1, vom căuta o soluţie de forma

$$\begin{cases} x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\ y(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 \\ z(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 \end{cases}.$$

Înlocuind aceste expresii în sistem se determină valorile $a_1 = 3,\ a_2 = -\frac{1}{2},\ a_3 = 0,\ b_2 = -\frac{5}{2},\ b_3 = \frac{1}{2},\ c_1 = -1,\ c_2 = \frac{1}{2},\ c_3 = 0$. Celelalte valori nu se determină în mod unic, dar pot fi alese, în cadrul condiţiilor existente, drept $a_0 = 0,\ b_0 = 1,\ b_1 = 1,\ c_0 = -3$.

O soluţie particulară este deci $Y_0 = \begin{pmatrix} 3t - \frac{1}{2}t^2 \\ 1 + t - \frac{5}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 \\ -3 - t - \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}$.

Identificarea coeficienţilor pentru o soluţie de forma $\overline{Y_0}$ nu este posibilă, aşa cum se vede de exemplu dacă începem cu identi-ficarea lui a_3 din ecuaţia a 3-a.

█ *Să se scrie soluţia generală a sistemului*

$$\begin{cases} y_1' - 3y_1 + 8y_2 - 4y_3 = 0 \\ y_2' + y_1 - 5y_2 + 2y_3 = 0 \\ y_3' + 3y_1 - 14y_2 + 6y_3 = 0 \end{cases}$$

folosind metoda coeficienţilor nedeterminaţi (*metoda a* I-*a*).

Indicaţie. Rădăcinile polinomului caracteristic sunt -1, 1, 2, deci ecuaţia diferenţială liniară de ordinul III asociată, are soluţiile e^{-x}, e^{x} *şi* e^{2x}. Căutăm soluţia de forma

$$Y_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot e^{-x}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot e^{x}, \quad Y_3 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \cdot e^{2x}$$

şi obţinem $a_1 = -2,\ a_2 = 1,\ a_3 = 4;\ b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 2;\ c_1 = 4,\ c_2 = -2$, $c_3 = -5$. Soluţia generală va fi

$$Y = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot e^{-x} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{x} + C_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot e^{-x}.$$

Să se integreze sistemul

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 - 2y_3 \\ y_2' = 4y_1 + y_2 \\ y_3' = 2y_1 + y_2 - y_3 \end{cases}$$

folosind metoda matricială şi să se verifice rezultatul, inclusiv independenţa soluţiilor obţinute.

Indicaţie. Valorile proprii ale matricei A sunt $r_1 = 1,\ r_2 = r_3 = -1$.

Deoarece sistemul este scris în forma $Y' = AY$. Vom scrie soluţiile în forma $Y = e^{Ax} \cdot C$, unde C este o matrice coloană formată din constante. Notăm $f(z) = e^{zx}$ şi rezultă condiţiile $f(1) = e^{x},\ f(-1) = e^{-x},\ f'(-1) = xe^{-x}$. Polinomul

$$g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z_2^2$$

care coincide cu f pe spectrul lui A, adică pentru care $g(1) = e^{x},\ g(-1) = e^{-x},\ g'(-1) = xe^{-x}$, are coeficienţii

$$a_0 = \frac{1}{4}e^{x} + \frac{3}{4}e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{-x},\ a_1 = \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x},\ a_2 = \frac{1}{4}e^{x} - \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}xe^{-x}.$$

Vom avea:

$$e^{Ax}=g(A)=\left(\frac{1}{4}e^{x}+\frac{3}{4}e^{-x}+\frac{1}{2}xe^{-x}\right)I+\left(\frac{1}{2}e^{x}-\frac{1}{2}e^{-x}\right)\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\ 4 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}+$$

$$+\left(\frac{1}{4}e^{x}-\frac{1}{4}e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-x}\right)\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ 0 & 5 & -8\\ 0 & 2 & -3\end{pmatrix}.$$

Coloanele matricii A formează un sistem fundamental de soluţii, anume

$$Y_1=\begin{pmatrix}e^{-x}\\ 2e^{x}-2e^{-x}\\ e^{x}-e^{-x}\end{pmatrix},\quad Y_2=\begin{pmatrix}xe^{-x}\\ 2e^{x}-e^{-x}-2xe^{-x}\\ e^{x}-e^{-x}-xe^{-x}\end{pmatrix}\ \text{şi}$$

$$Y_3=\begin{pmatrix}-2xe^{-x}\\ -2e^{x}+2e^{-x}+4xe^{-x}\\ -e^{-x}+2e^{-x}+2xe^{-x}\end{pmatrix}.$$

Pentru verificarea independenţei soluţiilor este suficient (conform teoremei lui Abel – Ostrogradski – Liouville) să calculăm determinantul celor trei soluţii pentru $x=0$; obţinem

$$\Delta(Y_1,Y_2,Y_3)(0)=1,$$

ceea ce se obţine totdeauna deoarece $e^{A0}=I$.

█ *Să se scrie soluţia generală a sistemului*

$$\begin{cases} y_1' - 2y_1 + y_2 = xe^{x}\\ y_2' - y_1 - 2y_2 = e^{2x}\cos x,\end{cases}$$

ţinând cont de forma particulară a membrului drept.

Indicaţie. Soluţia generală a sistemului omogen ataşat este

$$Y=C_1\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix}e^{2x}+C_2\begin{pmatrix}-\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}e^{2x},$$

rădăcinile polinomului caracteristic fiind $r_1 = 2 + i$ *şi* $r_2 = 2 - i$.

Membrul drept îl considerăm de forma $F = F_1 + F_2$, unde

$$F_1 = \begin{pmatrix} xe^x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ şi } F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x}\cos x \end{pmatrix}.$$

Pentru sistemul $Y' + AY = F_1$ căutăm o soluţie de forma

$$Y_{01} = \begin{pmatrix} (a_0 + a_1 x)e^x \\ (b_0 + b_1 x)e^x \end{pmatrix},$$

deoarece $r = 1$ nu este soluţie a polinomului caracteristic. Pentru sistemul $Y' + AY = F_2$ căutăm o soluţie de forma

$$Y_{02} = \begin{pmatrix} (a_0 + a_1 x)\cos x + (b_0 + b_1 x)\sin x \\ (c_0 + c_1 x)\cos x + (d_0 + d_1 x)\sin x \end{pmatrix} e^{2x}$$

deoarece $r = 2 + i$ este rădăcina polinomului caracteristic. O soluţie particulară a sistemului dat va fi $Y_0 = Y_{01} + Y_{02}$.

BIBLIOGRAFIE

[AA]	Angot A.	*Compléments de Mathématiques,* Paris, 1957
[A-R]	Anton Gh., Radu Gh.	*Ecuaţii ordinare cu diferenţe şi aplicaţii,* Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 1998
[AVI]	Arnold V. I.	*Ecuaţii diferenţiale ordinare,* Ed. Şt. Encicl., 1978
[B-F-S]	Bălan T., Florescu G., Stoica L.	*Curs de Matematici Speciale (2 Vol),* Repr. Univ. Craiova, 1978
[BT1]	Bălan T.	*Matematici Speciale,* Repr. Univ. Craiova, 1980
[BT2]	Bălan T.	*Matematici Speciale II,* Repr. Univ. Craiova, 1979
[BT3]	Bălan T.	*Transformata Laplace,* Ed. Universitaria, Craiova, 2001
[BV]	Barbu V.	*Ecuaţii diferenţiale,* Ed. Junimea, Iaşi, 1985
[B-N]	Bougrov Y., Nikolski S.	*Exercices de mathématiques supérieures,* Moscova, 1985
[BM]	Braun M.	*Differential Equations and Applications,* Springer, 1975
[B-S]	Brînzănescu V., Stănăşilă O.	*Matematici Speciale – teorie, exemple, aplicaţii,* Ed. All, Bucureşti, 1994
[B-S-T]	Budak B. M., Samarski A. A. Tihonov A. N.	*Sbornik zadaci po matematiceskoi fizike,* *Moscova, 1972*
[CS]	Chiriţă S.	*Probleme de Matematici Superioare,* EDP, 1989
[CA]	Corduneanu A.	*Ecuaţii diferenţiale,* Ed. Facla, Timişoara, 1981
[C-R]	Craiu M., Roşculeţ M.	*Ecuaţii Diferenţiale Aplicative,* EDP, Bucureşti, 1971
[C&co]	Crstici B. & co.	*Matematici Speciale,* EDP, Bucureşti, 1981
[D-P-K]	Danko P., Popov A., Kogevnikova T.	*Exercices et problèmes des mathématiques supérieures (2 parties),* Moscova, 1985

[DBP]	Demidovici B. P.	*Problems in Mathematical Analysis,* Moscova, 1989
[DA]	Dobrescu A.	*Geometrie diferenţială,* EDP, Bucureşti, 1963
[D-D-P]	Dobrescu E., L. Dobrescu-Purice	*Matematici Speciale*, EDP, Bucureşti, 1967
[DE]	Dobrescu E.	*Matematici Speciale,* EDP, Bucureşti, 1965
[ED]	Ebâncă D.	*Metode de calcul numeric*, Ed. Sitech, Craiova, 1994
[FGM]	Fihtenholţ G. M.	*Calcul diferenţial şi integral (3 Vol)*, Moscova, 1964
[HA]	Haimovici A.	*Ecuaţii diferenţiale şi integrale,* EDP, Bucureşti, 1965
[IDV]	Ionescu D.V.	*Ecuaţii diferenţiale şi integrale,* EDP, Bucureşti, 1964
[I-K]	Ionescu D.V., Kalik C.	*Ecuaţii diferenţiale ordinare şi cu derivate parţiale,* EDP, Bucureşti, 1965
[IIV]	Istrăţescu I. V.	*Introducere în teoria punctelor fixe,* Ed. Acad. RSR, 1973
[K-K-M]	Krasnov M. L., Kiselev A. I., Makarenko G. I.	*Functions of a Complex Variable,* *Operational Calculus,* *and Stability Theory,* Moscova, 1984
[KE]	Kreyszig E.	*Advanced Engineering Mathematics,* John Wiley, 1988
[KGI]	Krucikovici G. I.	*Culegere de probleme şi exerciţii,* Moscova, 1970
[McC]	McClamroch H.	*State Models of Dynamic Systems,* Springer, 1980
[MGh]	Micula Gh.	*Funcţii Spline şi Aplicaţii,* Ed. Tehnică, 1978
[M-P]	Micula Gh., Paraschiva P.	*Ecuaţii diferenţiale şi integrale prin probleme şi exerciţii,* Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1989
[MAD]	Mîşkis A. D.	*Advanced Mathematics for Engineers,* Moscova, 1975
[M-L-D]	Mitrea A. I., Lungu N., Dumitraş D.	*Capitole Speciale de Matematică – culegere de probleme* Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 1996
[MGh]	Mocică Gh.	*Probleme de Funcţii Speciale,* EDP, Bucureşti, 1988

[MG]	Moroşanu Gh.	*Ecuaţii diferenţiale – Aplicaţii,* Ed. Acad. RSR, 1989
[N-S]	Nicolescu L-J., Stoka M.	*Matematici pentru ingineri (2 Vol),* Ed. Tehnică, 1969
[N-D-M]	Nicolescu M., Dinculeanu N., Marcus S.	*Manual de Analiză Matematică (2 Vol),* EDP, Bucureşti, 1964
[O-S]	Olariu V., Stănăşilă O.	*Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale,* Ed. Tehnică, Bucureşti, 1982
[O-P]	Olariu V., Prepeliţă V.	*Matematici Speciale*, EDP, Bucureşti, 1985
[P-R]	Paraschiva P., Rus. A. I.	*Ecuaţii diferenţiale şi integrale,* EDP, Bucureşti, 1975
[P-T-G]	Pavel G., Tomuţa F. I., Gavrea I.	*Matematici Speciale – Aplicaţii,* Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1981
[PL]	Pontriaguine L.	*Ecuaţii diferenţiale ordinare,* Moscova, 1969
[P-P-M]	Popa M., Popa A., Militaru R.	*Noţiuni de analiză numerică,* Ed. Sitech, Craiova, 2001
[P-C-R]	Predoi M., Constantinescu D., Racilă M.	*Teme de calcul diferenţial / Teme de calcul integral,* Ed. Sitech, Craiova, 2000
[PM]	Predoi M.	*Analiză Matematică,* Ed. Universitaria, Craiova, 1994
[RV]	Răsvan Vl.	*Teoria Stabilităţii,* Ed. Şt. Encicl., Bucureşti, 1987
[RE]	Rogai E.	*Exerciţii şi probleme,* Ed. Tehnică, Bucureşti, 1965
[RV]	Rudner V.	*Probleme de Matematici Speciale*, EDP, 1970
[RAI]	Rus A. Ioan	*Principii şi aplicaţii ale teoriei punctului fix,* Dacia, 1979
[R-P]	Rus A. Ioan, Pavel P.	*Ecuaţii diferenţiale,* EDP, Bucureşti, 1982
[RMPI]	Rus A.I., Micula Gh., Pavel P., Ionescu B. B.	*Probleme de ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale,* EDP, Bucureşti, 1982
[ŞGh]	Şabac Gh.	*Matematici Speciale (Vol. 1),* EDP, Bucureşti, 1981

[SMM]	Smirnov M. M.	*Zadaci i uravnenia matematiceskoi fiziki,* Moscova, 1968
[SVV]	Stepanov V. V.	*Curs de ecuaţii diferenţiale,* Moscova, 1954
[T-O]	Teodorescu N., Olariu V.	*Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale (3 Vol),* Ed. Tehnică, Bucureşti, 1978
[T-S]	Tihonov A. N., Samarski A. A.	*Uravnenia matematiceskoi fiziki,* Moscova, 1972
[TR]	Trandafir R.	*Matematici pentru ingineri – culegere,* Ed. Tehnică, 1969
[TC]	Tudosie C.	*Probleme de ecuaţii diferenţiale,* Ed. Dacia, 1990
[T-Ş]	Turcitu G., Şterbeţi C.	*Matematici Speciale – Analiză complexă şi ecuaţii diferenţiale,* Ed. Radical, Craiova, 2001
[V-P]	Vraciu G., Popa A.	*Metode Numerice cu Aplicaţii în Tehnica de Calcul,* Ed. Scrisul Românesc, Craiova, 1982
[Z-D]	Zadeh L. A., Desoer C. A.	*Linear System Theory,* Mc.Graw Hill comp., 1963

Tipărit în România
SITECH
Craiova, Str. Romul, bl. T1 - parter
Tel./fax: 0251 414 003; 0722 216 508
Mobil: 0722 216 509; 0741 205 715
e-mail: sitech@rdslink.ro