10. INTEGRALA DE SUPRAFAŢĂ DE PRIMUL TIP

10.3. Exerciţii propuse

Exerciţiul 10.3.1. Să se calculeze:

a) $\iint_S \frac{1}{x+y+z} dS$, unde (S) este porţiunea din planul x + y+ z = a decupată de planele de coordonate;

b) $\iint_S z dS$, unde (S) este porţiunea din paraboloidul $z = \frac{x^2+y^2}{2}$, decupată de cilindrul $x^2 + y^2 = 8$;

c) $\iint_S (x^2+y^2) dS$, unde (S) este sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

d) $\iint_S (xy+z) dS$, unde (S) este porţiunea suprafeţei conice $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$ decupată de planul z = 1;

e) $\iint_S \left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{1/2} dS$,unde (S) este elipsoidul

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

R. a) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{596}{15}\pi$; c) $\frac{8}{3}\pi a^4$; d) $\frac{2}{3}\pi\sqrt{2}$;

e) $\frac{4}{3}\pi abc(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})$.

Exerciţiul 10.3.2. Să se determine aria porţiunii din sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ decupată de cilindrul $x^2 + y^2 - ay = 0$, situată în semispaţiul $z \geq 0$.

R. $(\pi - 2)a^2$

Exerciţiul 10.3.3. Să se determine aria porţiunii de suprafaţă secţionată de cilindrul $x^2 + y^2 = a^2$, x > 0, y >0 din paraboloidul hiperbolic z = xy.

R. $\frac{\pi}{6}\left[(1+a^2)^{3/2}-1\right]$

Exerciţiul 10.3.4. Să se determine aria porţiunii de suprafaţă secţionată de cilindrul $x^2 + y^2 - 2x = 0$ din conul $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

R. $\pi\sqrt{2}$

Exerciţiul 10.3.5. Să se determine aria porţiunii de suprafaţă secţionată de cilindrul $x^2 + y^2 = a^2$ din conul $x = (y^2 + z^2)^{1/2}$.

R. $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi a^2$

Exerciţiul 10.3.6. Să se determine aria porţiunii conului $4(x^2 + y^2) - z^2 = 0$, cuprinsă între planele z = 0 şi z = 2.

R. $\pi\sqrt{5}$

Exercițiul 10.3.7. Să se determine masa porțiunii din suprafața conului omogen $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$ decupată de cilindrul $x^2 + y^2 = ax$ și să se precizeze poziția centrului de greutate al acesteia.

R. $m = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi a^2$, $x_G = \frac{a}{2}$, $y_G = 0$, $z_G = \frac{16}{9}a$

Exercițiul 10.3.8. Să se determine momentul de inerție, în raport cu axa Oz al porțiunii sferice $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ știind că densitatea în fiecare punct este $\rho(x, y, z) = z$.

R. $\frac{\pi}{8}a^5$.

Exercițiul 10.3.9. Se consideră suprafața conică omogenă

$$z = \frac{h}{a}\sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq a^2. \text{ Se cere:}$$

a) poziția centrului de greutate

b) momentele sale de inerție în raport cu planele de coordonate.

R. a) $x_G = y_G = 0$, $z_G = \frac{2}{3}h$; b) $I_{xOy} = \frac{1}{2}\pi h^2 a(a^2 + h^2)^{1/2}$;

$I_{yOz} = I_{zOx} = \frac{1}{4}\pi a^3(a^2 + h^2)^{1/2}$.