11. INTEGRALA CURBILINIE ÎN RAPORT CU COORDONATELE. CÂMPURI DE GRADIENŢI

11.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale

11.1.1. Elemente de teoria câmpurilor

Definiţia 11.1.1. 1. Fie *D* $\subset \mathbb{R}^3$ *o mulţime deschisă. O funcţie U:D* $\to \mathbb{R}$ *se numeşte* ***câmp scalar***.

Dacă U:D $\to \mathbb{R}$ este un câmp scalar fixat *şi c* $\in \mathbb{R}$ *este fixat, suprafaţa* (S_c) *de ecuaţie U(x, y, z) = c, se numeşte* ***suprafaţă de nivel constant*** *asociată câmpului U şi numărului c.*

Dacă D $\subset \mathbb{R}^3$ *şi c* $\in \mathbb{R}$ *este fixat,curba* (γ_c) *de ecuaţie implicită U(x, y) = c, se numeşte* ***curba de nivel constant*** *asociată câmpului U şi lui c.*

Definiţia 11.1.1.2. *Fie A şi B două puncte oarecare din* $\mathbb{R}^3$. *Perechea ordonată (A, B) se numeşte* ***vector tangent la*** $\mathbb{R}^3$ *în punctul A (sau* ***segment orientat*** *sau* ***vector legat****) şi se notează* $\vec{AB}$. *Punctul A se numeşte originea sau* ***punctul de aplicaţie al vectorului.***

Dacă O = (0, 0, 0) este originea lui $\mathbb{R}^3$, atunci $\vec{OB}$ se numeşte **vectorul de poziţie** al punctului B.

Punctul V = B - A $\in \mathbb{R}^3$ se numeşte **partea vectorială a vectorului tangent** şi în loc de $\vec{AB}$ putem nota $\vec{V}_A$ sau chiar $\vec{V}$ dacă punctul de aplicaţie se subînţelege.

Definiţia 11.1.1.3. *Doi vectori tangenţi care au aceeaşi parte vectorială, dar au puncte de aplicaţie diferite se numesc* ***paraleli***.

Definiţia 11.1.1.4. *Dacă A* $\in \mathbb{R}^3$ *este fixat, mulţimea tuturor vectorilor tangenţi la* $\mathbb{R}^3$ *în A se numeşte* ***spaţiu tangent la*** $\mathbb{R}^3$ *în punctul A şi se notează cu* $T_A\mathbb{R}^3$.

Spaţiul tangent se organizează ca spaţiu vectorial cu operaţiile

$$\vec{V}_A + \vec{W}_A = \overrightarrow{(V+W)}_A \text{ şi } \lambda\cdot\vec{V}_A = \overrightarrow{\lambda V}_A$$

şi este izomorf cu $\mathbb{R}^3$, izomorfismul fiind dat de corespondenţa V $\to \vec{V}_A$.

Norma (lungimea) vectorului $\vec{V}_A$ se defineşte prin

$$\|\vec{V}_A\| = \|V\|$$

Produsul scalar în $T_A\mathbb{R}^3$ se defineşte cu ajutorul produsului scalar din $\mathbb{R}^3$ prin

$$\left\langle \vec{V}_A, \vec{W}_A \right\rangle = \langle V, W\rangle .$$

Dacă $\langle V, W\rangle = 0$, atunci $\vec{V}_A$, $\vec{W}_A$ se numesc ortogonali.

Un sistem ordonat de trei versori (vectori de normă 1) reciproc ortogonali, tangenţi la $\mathbb{R}^3$ în A se numeşte ***reper în punctul A***.

Dacă { $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_3$ } este un reper în punctul A , atunci orice $\vec{V} \in T_A\mathbb{R}^3$ se scrie

$$\vec{V} = \left\langle \vec{V}, \vec{E}_1 \right\rangle \cdot \vec{E}_1 + \left\langle \vec{V}, \vec{E}_2 \right\rangle \cdot \vec{E}_2 + \left\langle \vec{V}, \vec{E}_3 \right\rangle \cdot \vec{E}_3$$

Numerele reale $v_i = \left\langle \vec{V}, \vec{E}_i \right\rangle$, *i = 1,2,3* se numesc ***componentele lui*** $\vec{V}$ în raport cu reperul fixat.

Dacă notăm $\vec{i}_A = \overrightarrow{(1,0,0)}_A$, $\vec{j}_A = \overrightarrow{(0,1,0)}_A$, $\vec{k}_A = \overrightarrow{(0,0,1)}_A$ atunci reperul $\{\vec{i}_A, \vec{j}_A, \vec{k}_A\}$ se numeşte **reper natural** în punctul A, iar componentele unui vector în acest reper se numesc **componente euclidiene**.

Definiţia 11.1.1.5 *O funcţie* $\vec{V}$ *care asociază fiecărui punct A din* $D \subset \mathbb{R}^3$ *un vector* $\vec{V}_A = \vec{V}$ (A), *tangent la* $\mathbb{R}^3$ *în A se numeşte* ***câmp vectorial***.

Definiţia 11.1.1.6. *Dacă* $\vec{V} : D \to \bigcup_{A \in D} T_A\mathbb{R}^3$ *are proprietatea că* $\vec{V}(A_1)$ *este paralel cu* $\vec{V}(A_2)$ *pentru orice* $A_1, A_2 \in D$, *atunci* $\vec{V}$ *se* ***numeşte câmp vectorial paralel sau constant.***

Câmpurile paralele $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ definite prin

$$\vec{i}(A) = \vec{i}_A, \quad \vec{j}(A) = \vec{j}_A, \quad \vec{k}(A) = \vec{k}_A$$

se numesc **câmpuri fundamentale**.

Se poate demonstra că, dacă $\vec{V} : D \to \bigcup_{A \in D} T_A\mathbb{R}^3$ este un câmp vectorial, atunci există trei funcţii reale $V_i : D \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ astfel încât

$$\vec{V} = V_1 \cdot \vec{i} + V_2 \cdot \vec{j} + V_3 \cdot \vec{k}$$

Funcţiile scalare V_1, V_2, V_3 se numesc **componentele euclidiene** ale câmpului $\vec{V}$.

Se observă că orice câmp vectorial $\vec{V} : D \to \bigcup_{A \in D} T_A\mathbb{R}^3$ este echivalent cu o funcţie vectorială

$$\vec{V} : D \to \mathbb{R}^3, \ \vec{V}(A) = (V_1(A), V_2(A), V_3(A))$$

unde $V_1, V_2, V_3 : D \to \mathbb{R}$ sunt componentele euclidiene ale câmpului vectorial $\vec{V}$. Spunem că un câmp este de clasă C^k dacă componentele sale sunt de clasă C^k.

Definiţia 11.1.1.7. *Fie* $D \subset \mathbb{R}^3$ *o mulţime deschisă şi* $U : D \to \mathbb{R}$ *un câmp scalar de clasă* C^1 *pe D.*

Câmpul vectorial $\vec{V}$ *definit prin*

$$\vec{V} = grad\ U = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

se numeşte ***câmp de gradienţi*** *asociat câmpului scalar U.*

Priu urmare, în orice punct $A \in D$, ***gradientul câmpului scalar U*** este

$$(grad\ U)(A) = \frac{\partial U}{\partial x}(A) \cdot \vec{i}_A + \frac{\partial U}{\partial y}(A) \cdot \vec{j}_A + \frac{\partial U}{\partial z}(A) \cdot \vec{k}_A$$

Proprietăţile de calcul ale gradientului rezultă direct din proprietăţile derivatelor parţiale.

Definiţia 11.1.1.8. Fie *Fie* $D \subset \mathbb{R}^3$ *o mulţime deschisă şi* $\vec{V}$ *un câmp vectorial de clasă* C^1 *pe D, de componente* $V_1, V_2, V_3 : D \to \mathbb{R}$ *. Se numeşte* ***divergenţa*** *câmpului vectorial* $\vec{V}$ *câmpul scalar*

$$div\ \vec{V} : D \to \mathbb{R}, \ div\ \vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

*Se numeşte **rotorul** câmpului vectorial $\vec{V}$ câmpul vectorial*

$$rot\,\vec{V} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right)\cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\cdot \vec{k}$$

Această egalitate poate fi reţinută uşor folosind scrierea formală

$$rot\,\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

("dezvoltând" acest determinant simbolic după prima linie)

Observaţia 11.1.1.1. Există o posibilitate de uniformizare a proprietăţilor de calcul ale gradientului, divergenţei şi rotorului, pentru câmpul de clasă C^1, cu ajutorul unui operator simbolic:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot \vec{k}$$

numit *operatorul lui Hamilton sau operatorul* ∇ *(nabla).*

Cele trei operaţii de bază din calculul vectorial (înmulţirea cu scalari, produsul scalar, produsul vectorial) aplicate "vectorului" ∇ vor conduce la cei trei operatori diferenţiali definiţi anterior.

Astfel, convenind să definim "produsul" lui $\frac{\partial}{\partial x}$ (respectiv, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$) cu un camp scalar φ ca fiind $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ (respectiv, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$) obţinem:

- dacă U este un câmp scalar de clasă C^1, înmulţirea dintre "vectorul" ∇ şi câmpul scalar U conduce la

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot \vec{k} = grad\ U$$

- dacă $\vec{V}$ este un câmp vectorial de clasă C^1 de componente V_1, V_2, V_3 produsul scalar dintre "vectorul" ∇ şi câmpul vectorial $\vec{V}$ conduce la:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = div\,\vec{V}$$

- produsul vectorial dintre "vectorul" ∇ şi câmpul vectorial $\vec{V}$ conduce la

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = rot\,\vec{V}$$

Observaţia 11.1.1.2. Când un câmp descrie un fenomen care are anumite simetrii, atunci este mai comod a se lucra în alte coordonate decât cele carteziene, deoarece gradientul, divergenţa, rotorul au expresii mai simple.

De exemplu, dacă U este de forma $U(x, y, z) = f(x^2 + y^2)$ atunci acest câmp se numeşte **câmp cu simetrie axială**, suprafeţele de nivel constant sunt, în acest caz suprafeţe cilindrice, iar studiul unui asemenea câmp se face uşor utilizând coordonatele cilindrice.

Analog, dacă $U(x, y, z) = f(x^2 + y^2 + z^2)$ atunci U este **câmp cu simetrie sferică**, suprafeţele de nivel constant sunt sfere concentrice, având centrul în origine, iar pentru studiul unui asemenea câmp sunt indicate coordonatele sferice.

Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă şi $T:D \to \mathbb{R}^3$ o schimbare de coordonate de componente f_1, f_2, f_3 şi fie $D^* = T(D)$.

Punctul curent din D^* are coordonatele carteziene x, y, z şi coordonatele curbilinii u, v, w astfel încât

$$\begin{cases} x = f_1(u,v,w) \\ y = f_2(u,v,w) \\ z = f_3(u,v,w) \end{cases}$$

Vectorul de poziţie al punctului curent din D^* este

$$\vec{r} = f_1(u, v, w)\,\vec{i} + f_2(u, v, w)\,\vec{j} + f_3(u, v, w)\,\vec{k}$$

Notăm cu $\vec{e_u}$, $\vec{e_v}$, $\vec{e_w}$ versorii vectorilor $\vec{r_u}$, $\vec{r_v}$, $\vec{r_w}$ şi cu R_u, R_v, R_w normele aceloraşi vectori (parametrii lui Lamé):

$$\vec{r_u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u},\ \vec{r_v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v},\ \vec{r_w} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}$$

$$R_u = \|\vec{r_u}\|,\ R_v = \|\vec{r_v}\|,\ R_w = \|\vec{r_w}\|$$

$$\vec{e_u} = \frac{\vec{r_u}}{R_u},\ \vec{e_v} = \frac{\vec{r_v}}{R_v},\ \vec{e_w} = \frac{\vec{r_w}}{R_w}$$

Dacă $U:D^* \to \mathbb{R}$ este un câmp de scalari exprimat în coordonate carteziene. Acest câmp poate fi exprimat şi în coordonate curbilinii considerând funcţia

$$U^* = U \circ T.$$

Teorema 11.1.1.1. a) Dacă $\{\vec{e_u}, \vec{e_v}, \vec{e_w}\}$ este un reper ortogonal, atunci gradientul se exprimă astfel:

$$\operatorname{grad} U^* = \frac{1}{R_u}\cdot\frac{\partial U^*}{\partial u}\cdot\vec{e_u} + \frac{1}{R_v}\cdot\frac{\partial U^*}{\partial v}\cdot\vec{e_v} + \frac{1}{R_w}\cdot\frac{\partial U^*}{\partial w}\cdot\vec{e_w}$$

b) Pentru câmpul vectorial exprimat în coordonate carteziene prin

$$\vec{V}(x, y, z) = V_1(x, y, z)\cdot\vec{i} + V_2(x, y, z)\cdot\vec{j} + V_3(x, y, z)\cdot\vec{k}$$

şi în coordonate curbilinii prin

$$\vec{V}^*(u, v, w) = V_1^*(u, v, w)\cdot\vec{e_u} + V_2^*(u, v, w)\cdot\vec{e_v} + V_3^*(u, v, w)\cdot\vec{e_w}$$

rotorul şi divergenţa se exprimă astfel:

$$\operatorname{rot}\vec{V}^* = \frac{1}{R_u R_v R_w}\cdot\begin{vmatrix} R_u\vec{e_u} & R_v\vec{e_v} & R_w\vec{e_w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ R_u V_1^* & R_v V_2^* & R_w V_3^* \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{div}\vec{V}^* = \frac{1}{R_u R_v R_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(R_v R_w V_1^*) + \frac{\partial}{\partial v}(R_u R_w V_2^*) + \frac{\partial}{\partial w}(R_u R_v V_3^*)\right]$$

Observaţia 11.1.1.3. Punând în această ultimă formulă $V_1^* = \frac{1}{R_u} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial u}$,

$V_2^* = \frac{1}{R_v} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial v}$, $V_3^* = \frac{1}{R_w} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial w}$ care sunt componentele vectorului *grad* U^* deducem formula de calcul a laplacianului în coordonate curbilinii ortogonale:

$$\Delta f = div(grad\, U^*) = \frac{1}{R_u R_v R_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{R_v R_w}{R_u} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial u}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{R_u R_w}{R_v} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{R_u R_v}{R_w} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial w}\right)\right]$$

11.1.2. Integrala curbilinie de al doilea tip

Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ un drum. Atunci când parametrul t creşte de la a la b, punctul $\gamma(t)$ parcurge imaginea drumului γ într-un sens pe care-l numim sens direct sau pozitiv. Când t descreşte de la b la a, punctul $\gamma(t)$ parcurge imaginea drumului γ în sens invers.

Se numeşte *drum orientat* un drum pentru care s-a stabilit un sens de parcurgere a drumului.

Cum două drumuri echivalente au aceeaşi orientare, se poate vorbi despre orientarea unei curbe.

O curbă pentru care se precizează sensul de parcurgere a unui drum care îi aparţine, se numeşte *curbă orientată*.

Definiţia 11.1.2.1. Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ un drum neted şi orientat, definit prin $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, $t \in [a, b]$ şi $(\gamma) \subset \mathbb{R}^3$ imaginea sa.

Fie $\vec{V}$ un câmp vectorial de componente $V_1, V_2, V_3 : (\gamma) \to \mathbb{R}$. Fie $d = (a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b)$ o diviziune a intervalului [a, b] şi
$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii d.

Considerăm suma:

$$\sigma_{\vec{V}}(\Delta, \theta) = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{V} \circ \gamma\right)(\theta_i)\left(\vec{r_i} - \vec{r_{i-1}}\right) = \sum_{i=1}^{n}[V_1(\gamma(\theta_i))(f(t_i) - f(t_{i-1})) +$$
$$+ V_2(\gamma(\theta_i))(g(t_i) - g(t_{i-1})) + V_3(\gamma(\theta_i))(h(t_i) - h(t_{i-1}))]$$

Câmpul vectorial $\vec{V}$ se numeşte *integrabil în raport cu coordonatele pe drumul* γ dacă există $I \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ cu proprietatea că pentru orice diviziune d cu $\|d\| < \delta$ şi orice sistem θ de puncte intermediare, să avem:

$$\left|\sigma_{\vec{V}}(\Delta, \theta) - I\right| < \varepsilon$$

Numărul I se numeşte *integrala curbilinie în raport cu coordonatele sau integrala curbilinie de al doilea tip* a câmpului vectorial $\vec{V}$ pe drumul γ .

Se notează $I = \int_\gamma \vec{V}\, d\vec{r}$ (unde $\vec{r}$ este vectorul de poziţie

$\vec{r} = x\cdot \vec{i} + y\cdot \vec{j} + z\cdot \vec{k}$ al punctului curent pe (γ)) sau

$$I = \int_\gamma V_1(x, y, z)dx + V_2(x, y, z)dy + V_3(x, y, z)dz$$

Observaţia 11.1.2.1. Se poate demonstra că dacă $\vec{V}$ este integrabil în raport cu coordonatele pe un drum γ, atunci el este integrabil pe orice alt drum din clasa de echivalenţă a lui γ şi valoarea integralei e aceeaşi. Aceasta justifică folosirea denumirii de integrală curbilinie.

Teorema 11.1.2.1. Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ un drum neted şi orientat definit prin x = f(t), y = g(t), z = h(t) şi $(\gamma) \subset \mathbb{R}^3$ imaginea sa. Fie $\vec{V}$ un câmp vectorial de componente continue $V_1, V_2, V_3 : (\gamma) \to \mathbb{R}$. Atunci $\vec{V}$ este integrabil în raport cu coordonatele pe γ şi are loc egalitatea:

$$\int_\gamma \vec{V}\, d\vec{r} = \int_a^b [V_1(\gamma(t)) \cdot f'(t) + V_2(\gamma(t)) \cdot g'(t) + V_3(\gamma(t)) \cdot h'(t)]dt$$

Teorema 11.1.2.2. *(Proprietăţile integralei curbilinii de al doilea tip)*

a)Dacă $\vec{V}_1$ şi $\vec{V}_2$ sunt două câmpuri vectoriale integrabile în raport cu coordonatele pe drumul neted şi orientat γ, atunci pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea:

$$\int_\gamma \left(\alpha \vec{V}_1 + \beta \vec{V}_2\right) d\vec{r} = \alpha \int_\gamma \vec{V}_1\, d\vec{r} + \beta \int_\gamma \vec{V}_2\, d\vec{r}$$

b) Dacă $\vec{V}$ este un câmp vectorial integrabil în raport cu coordonatele pe γ_1, γ_2, atunci $\vec{V}$ este integrabil în raport cu coordonatele pe $\gamma_1 \cup \gamma_2$ şi

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \vec{V}\, d\vec{r} = \int_{\gamma_1} \vec{V}\, d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{V}\, d\vec{r}$$

c) Dacă $\vec{V}$ este un câmp vectorial integrabil în raport cu coordonatele pe drumul neted γ, atunci $\vec{V}$ este integrabil şi pe opusul γ^* al lui γ şi

$$\int_{\gamma^*} \vec{V}\, d\vec{r} = - \int_\gamma \vec{V}\, d\vec{r}$$

Teorema 11.1.2.3. Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, γ(t) = (f(t), g(t)) un drum orientat şi $\vec{V}$ un câmp vectorial de componente $V_1, V_2 : (\gamma) \to \mathbb{R}$ continue. Atunci $\vec{V}$ este integrabil în raport cu coordonatele pe γ şi are loc egalitatea:

$$\int_\gamma V_1(x,y)dx + V_2(x,y)dy = \int_a^b [V_1(f(t), g(t)) \cdot f'(t) + V_2(f(t), g(t)) \cdot g'(t)]dt$$

Observaţia 11.1.2.2. a) Pentru a pune în evidenţă faptul că o integrală curbilinie este calculată pe o curbă simplă, închisă, parcursă în sens pozitiv (lăsând în stânga domeniul mărginit de ea) se foloseşte notaţia

$$\oint_\gamma V_1(x,y)dx + V_2(x,y)dy$$

b) *Lucrul mecanic* efectuat de un câmp de forţe $\vec{V}$ care acţionează asupra unui punct material deplasându-l pe imaginea drumului γ este

$$L = \int_\gamma \vec{V}\, d\vec{r}\, .$$

11.1.3. Independenţa de drum a integralelor curbilinii de al doilea tip. Caracterizarea câmpurilor de gradienţi.

Definiţia 11.1.3.1. Un camp vectorial $\vec{V}$ de clasă C^1 se numeşte *câmp potenţial* sau *câmp de gradineţi* pe mulţimea D dacă există un câmp scalar U : D→ $\mathbb{R}$ astfel încât $\vec{V}$ = *grad U*, adică

$$\vec{V}(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z)\,\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}(x, y, z)\,\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z)\,\vec{k}$$

pentru orice (x, y, z) $\in$ A.

Câmpul U se numeşte *potenţialul scalar* al câmpului vectorial $\vec{V}$.

Observaţia 11.1.3.1. Un câmp de gradienţi are o infinitate de potenţiale scalare, care diferă între ele printr-un camp constant.

Teorema 11.1.3.1. Fie $\vec{V}$ un câmp de gradienţi pe mulţimea $D \subset \mathbb{R}^3$ şi
U : $D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un potenţial scalar al său. Fie γ : [a, b] →D un drum neted şi orientat. Atunci:

$$\int_\gamma \vec{V}\,d\vec{r} = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$$

(formula Leibnitz-Newton pentru integrala curbilinie a câmpurilor de gradienţi)

Teorema 11.1.3.2. Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime *deschisă şi conexă* şi $\vec{V}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe D. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $\vec{V}$ este câmp de gradienţi în D;
b) pentru orice γ : [a, b] →D drum neted, orientat şi închis
(adică γ(a) = γ(b)), are loc relaţia $\int_\gamma \vec{V}\,d\vec{r} = 0$;
c) oricare ar fi două drumuri netede şi orientate γ_1 : [a, b] →D,
γ_2 : [a, b] →D cu $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$ şi $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$, avem:

$$\int_{\gamma_1} \vec{V}\,d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{V}\,d\vec{r}$$

Observaţia 11.1.3.2. Un drum neted, orientat şi închis se numeşte contur, iar $\int_\gamma \vec{V}\,d\vec{r}$ se mai numeşte *circulaţia câmpului vectorial* $\vec{V}$ pe conturul γ.
Teorema anterioară se poate enunţa şi astfel:

Dacă $D \subset \mathbb{R}^3$ este o mulţime deschisă şi conexă şi $\vec{V}$ este un câmp vectorial de clasă C^1 pe D, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $\vec{V}$ este câmp de gradienţi în D;

b) circulaţia lui $\vec{V}$ pe orice contur din D este nulă;

c) $\int_{\gamma} \vec{V} d\vec{r}$ este independentă de γ, depinzând numai de capetele drumului, în D.

Teorema 11.1.3.3. Fie D⊂ $\mathbb{R}^3$ este o mulţime deschisă şi conexă

$\vec{V}$ (x, y, z) = V_1(x, y, z) $\vec{i}$ + V_2(x, y, z) $\vec{j}$ + V_3(x, y, z) $\vec{k}$, (x, y, z)∈D un câmp de gradienţi în D şi (x_0, y_0, z_0) ∈D fixat.

Atunci U : D → $\mathbb{R}$ definit prin

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} V_1(t, x_0, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} V_2(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} V_1(x.y, t)dt$$

este un potenţial scalar al lui $\vec{V}$.

Observaţia 11.1.3.3. Alegând alt punct (x_0, y_0, z_0) se obţine un alt potenţial scalar al lui $\vec{V}$, care diferă de primul printr-un câmp constant.

Definiţia 11.1.3.2. Un câmp vectorial de clasă C^1 se numeşte *irotaţional* sau *conservativ* dacă *rot* $\vec{V}$ = $\vec{O}$.

Observaţa 11.1.3.4. a) Dacă V_1, V_2 , V_3 sunt componentele lui $\vec{V}$, atunci $\vec{V}$ este conservativ dacă şi numai dacă au loc egalităţile

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x}, \ \frac{\partial V_2}{\partial z} = \frac{\partial V_3}{\partial y}, \ \frac{\partial V_3}{\partial x} = \frac{\partial V_1}{\partial z}$$

b) Dacă U este camp scalar de clasă C^2, atunci *rot (grad U)* = $\vec{O}$, prin urmare, orice *câmp de gradienţi este câmp conservativ*, dar reciproca nu este în general adevărată. Spre exemplu:

$\vec{V}$ (x, y) = - $\frac{y}{x^2+y^2} \cdot \vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2} \cdot \vec{j}$, (x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$\{(0, 0)} este conservativ (adică $\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x}$) dar nu este câmp de gradienţi (pentru că circulaţia lui $\vec{V}$ pe cercul $x^2 + y^2 = 1$ este 2π)

Teorema 11.1.3.4. Fie D⊂ $\mathbb{R}^3$ o mulţime *deschisă, stelată,* iar $\vec{V}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe D. Atunci, $\vec{V}$ este câmp de gradienţi dacă şi numai dacă este câmp conservativ.

Să reamintim că D⊂ $\mathbb{R}^3$ este o mulţime *stelată* dacă există (x_0,y_0, z_0) ∈ S astfel încât oricare ar fi (x, y, z) ∈ A, segmentul de extremităţi (x_0,y_0, z_0) şi (x, y, z) (adică imaginea curbei γ : [0, 1] → $\mathbb{R}^3$
γ(t) = ((1 - t)x_0 + tx, (1 - t)y_0 + ty, (1 - t)z_0 + tz)) este conţinut în D.

Deoarece orice mulţime stelată este conexă, deducem::

Teorema 11.1.3.5. Dacă D⊂ $\mathbb{R}^3$ este o mulţime deschisă şi stelată, iar $\vec{V}$ este un câmp vectorial de clasă C^1 în D, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $\vec{V}$ este un câmp de gradienţi în D;

b) circulaţia lui $\vec{V}$ pe orice contur din D este nulă;

c) integrala $\int_{\gamma} \vec{V} d\vec{r}$ este independentă de γ pe D;

d) $\vec{V}$ este un câmp conservativ pe D;
e) sunt adevărate (în D) egalităţile:

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x}, \frac{\partial V_2}{\partial z} = \frac{\partial V_3}{\partial y}, \frac{\partial V_3}{\partial x} = \frac{\partial V_1}{\partial z}$$

Observaţia 11.1.3.5. În multe lucrări de specialitate, noţiunea de mulţime deschisă şi stelată este înlocuită cu cea similară de domeniu simplu conex, a cărei definiţie (în $\mathbb{R}^3$) necesită cunsoştinţe de teoria suprafeţelor. De aceea a fost preferată noţiunea folosită în teoremele anterioare.

Folosirea noţiunilor de "câmp de gradienţi" şi "câmp conservativ" în locul noţiunii de " diferenţială totală exactă " este justificată prin aplicaţiile directe ale teoriei câmpurilor.

Observaţia 11.1.3.6. Independenţa de drum a integralei curbilinii de speţa a II-a este importantă pentru a observa în ce condiţii lucrul mechanic efectuat de câmpul de forţe $\vec{F}$ (x, y, z) pentru a deplasa un punct material din
M(x_0, y_0, z_0) în N(x_1, y_1, z_1) nu depinde de drumul parcurs, ci doar de extremităţile sale.

Cele mai importante câmpuri de forţe pentru care lucrul mecanic este independent de drum sunt:

- Forţa de greutate $\vec{F} = -\, mg\,\vec{k}$;
- Forţa de atracţie newtoniană $\vec{F} = -\,\frac{k}{r^3}\cdot\vec{r}$
- Forţa elastică $\vec{F} = -\,k^2\,\vec{r}$;

(aici $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ şi $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$)