11. INTEGRALA CURBILINIE ÎN RAPORT CU COORDONATELE. CÂMPURI DE GRADIENŢI

11.2. Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 11.2.1. *Fie câmpul scalar* $U(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
a) Să se determine (grad U)(1, 1, 1)
b) Să se determine $\dfrac{\partial U}{\partial \vec{v}}(1, 1, 1)$, *unde* $\vec{v}$ *este versorul gradientului în punctul (1, 1, 1)*

Soluţie. a) $(\text{grad } U)(1, 1, 1) = \dfrac{\partial U}{\partial x}(1, 1, 1) \cdot \vec{i}_A + \dfrac{\partial U}{\partial y}(1, 1, 1) \cdot \vec{j}_A + \dfrac{\partial U}{\partial z}(1, 1, 1) \cdot \vec{k}_A$ unde A = (1, 1, 1) iar $\{\vec{i}_A, \vec{j}_A, \vec{k}_A\}$ este reperul natural în $T_A\mathbb{R}^3$. Rezultă $(\text{grad } U)(1, 1, 1) = 2(\vec{i}_A + \vec{j}_A + \vec{j}_A)$.

b) $\dfrac{\partial U}{\partial \vec{v}}(1,1,1) = \vec{v} \cdot (\text{grad}U)(1,1,1) = \dfrac{(\text{grad}U)(1,1,1)}{\| (\text{grad}U)(1,1,1) \|} \cdot (\text{grad}U)(1,1,1) = \|(\text{grad } U)(1, 1, 1)\| = \sqrt{12}$

Exerciţiul 11.2.2. *Să se determine divergenţa şi rotorul câmpului vectorial*

$$\vec{V} = x^2yz \cdot \vec{i} + xy^2z \cdot \vec{j} + xyz^2 \cdot \vec{k}$$

Soluţie. Notând $V_1(x, y, z) = x^2yz$, $V_2(x, y, z) = xy^2z$, $V_3(x, y, z) = xyz^2$ rezultă:

$$(\text{div } \vec{V})(x, y, z) = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = 6xyz$$

$$(\text{rot } \vec{V})(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (xz^2 - xy^2) \cdot \vec{i} + (x^2z - yz^2) \cdot \vec{j} + (y^2z - x^2z) \cdot \vec{k}.$$

Exerciţiul 11.2.3. *Să se demonstreze că* $\vec{V} = \dfrac{\vec{r}}{r^3}$ *unde* $\vec{r}$ *este vectorul de poziţie şi* $r = \|\vec{r}\| \neq 0$, *este un câmp vectorial solenoidal.*

Soluţie. Deoarece $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ rezultă

$$\vec{V} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \vec{i} + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \vec{j} + + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \vec{k}$$

Calcule directe arată că $(\text{div } \vec{V})(x, y, z) = 0$, deci $\vec{V}$ este solenoidal pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Exerciţiul 11.2.4. *Să se demonstreze că*

$$\vec{V} = yz(2x + y + z) \cdot \vec{i} + zx(x + 2y + z) \cdot \vec{j} + xy(x + y + 2z) \cdot \vec{k}$$

este un camp vectorial irotaţional.
Soluţie. Fie $V_1(x, y, z) = yz(2x + y + z)$, $V_2(x, y, z) = zx(x + 2y + z)$ şi
$V_3(x, y, z) = xy(x + y + 2z)$.

Deoarece $\frac{\partial V_3}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial V_2}{\partial z}(x, y, z) = x(x + 2y + 2z)$

$\frac{\partial V_1}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial V_3}{\partial x}(x, y, z) = y(2x + y + 2z)$

$\frac{\partial V_2}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial V_1}{\partial y}(x, y, z) = z(2x + 2y + z)$

rezultă că *rot* $\vec{V} = \vec{0}$ în $\mathbb{R}^3$.

Exercițiul 11.2.5. Să se calculeze I= $\int_\gamma xdx + e^x dy$, unde γ este definită de ecuaţiile parametrice x = ln(1+ t), y = $\sqrt{1+t}$, t∈[0, 1].

Soluţie. I = $\int_\gamma xdx + e^x dy = \int_0^1 \left[\ln(1+t)\cdot\frac{1}{1+t} + e^{\ln(1+t)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+t}}\right]dt$ =

$$= \int_0^1 \left[\frac{\ln(1+t)}{1+t} + \frac{\sqrt{1+t}}{2}\right]dt = \left[\frac{1}{2}\ln^2(1+t) + \frac{1}{3}\sqrt{(1+t)^3}\right]\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$

Exercițiul 11.2.6. Să se calculeze I = $\int_\gamma ydx - xdy + (x^2 + y^2 + z^2)dz$, unde γ este dată de reprezentarea parametrică x = - tcos t + sin t ,
y = t sin t + cos t , z = t + 1, t∈[0, π].

Soluţie. I = $\int_\gamma ydx - xdy + (x^2 + y^2 + z^2)dz$ =

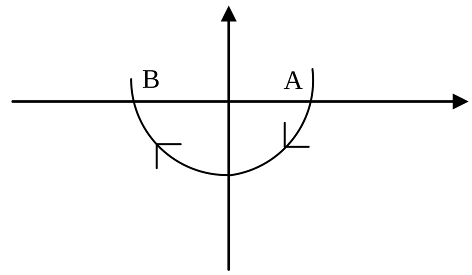
$$= \int_0^1 [(t\sin t + \cos t)(t\sin t) - (-t\cos t + \sin t)(t\cos t) +$$

$$+ [(-\mathrm{t}\cos\mathrm{t} + \sin\mathrm{t})^2 + (t\sin t + \cos t)^2 + (t+1)^2]dt =$$

$$= \int_0^\pi (3t^2 + 2t + 2)dt = \pi^3 + \pi^2 + 2\pi .$$

Exercițiul 11.2.7. Să se calculeze $\int_\gamma (y+1)dx + x^2 dy$, unde (γ) este porţiunea din parabola y = $x^2 - 1$ cuprinsă între punctele A(1, 0) şi B(-1, 0), având originea în A.

Soluţie. Curba este dată prin ecuaţia sa explicită.



Ecuaţiile parametrice se deduc imediat:

$$\gamma : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$$

Punctul A(1, 0) corespunde valorii t = 1 şi punctual B(-1, 0) corespunde valorii t = -1.
Integrala va fi:

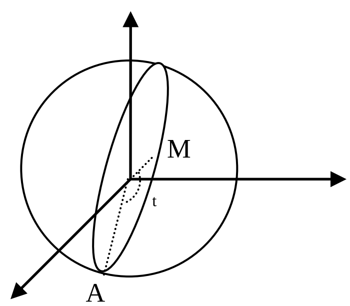
$$I = \int_{1}^{-1} [(t^2 - 1 + 1) + t^2 \cdot 2t]dt = -\int_{-1}^{1} (2t^3 + t^2)dt = -2\frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}$$

Exerciţiul 11.2.8. Să se calculeze

$$\oint_{\gamma} (y - 2z)dx + (x - z)dy + (2x - y)dz$$

unde γ este dat de ecuaţiile implicite $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x - y + z = 0$ şi are originea şi capătul în $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Soluţie.



Ecuaţiile parametrice ale cercului aflat la intersecţia sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ cu planul $x - y + z = 0$ se obţin rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z = y \\ (x + z)^2 - 2xz = 1 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = y \\ xz = \dfrac{2y^2 - 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y + \sqrt{2 - 3y^2}}{2} \\ z = \dfrac{y - \sqrt{2 - 3y^2}}{2} \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x = \dfrac{y - \sqrt{2 - 3y^2}}{2} \\ z = \dfrac{y + \sqrt{2 - 3y^2}}{2} \end{cases}, \ y \in \left[-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$$

care reprezintă ecuaţia celor două semicercuri ce formează cercul γ.

Pentru calculul integralei curbilinii este utilă notaţia y = $\sqrt{\frac{2}{3}}\sin t$

$t \in [0, 2\pi]$. Ecuaţiile parametrice ale lui γ devin:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin t \\ y = \frac{2}{\sqrt{6}}\sin t \\ z = \frac{1}{\sqrt{6}}\sin t - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, t \in [0,2\pi] \end{cases}$$

Integrala curbilinie este:

$$I = \int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\sin t - \frac{2}{\sqrt{6}}\sin t + \frac{2}{\sqrt{2}}\cos t\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t + \frac{1}{\sqrt{6}}\cos t\right) + \right.$$

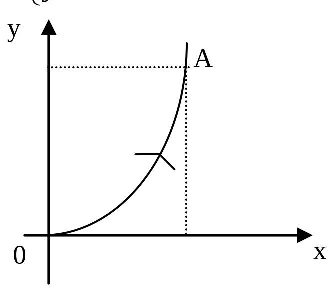
$$+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin t - \frac{1}{\sqrt{6}}\sin t + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\cos t\right) +$$

$$\left.\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{2}{\sqrt{6}}\sin t - \frac{2}{\sqrt{6}}\sin t\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)\right]dt = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Exerciţiul 11.2.9. În fiecare punct al unui plan, un punct material este acţionat de forţa $\vec{F}$ ale cărei proiecţii pe axele de coordonate sunt

$F_1(x, y) = xy$, $F_2(x, y) = x + y$. Să se determine lucrul mecanic efectuat de forţa $\vec{F}$, când punctul material se deplasează din origine în A(1, 1) pe parabola $y = x^2$.

Soluţie. Ecuaţiile parametrice ale lui γ sunt: $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$.

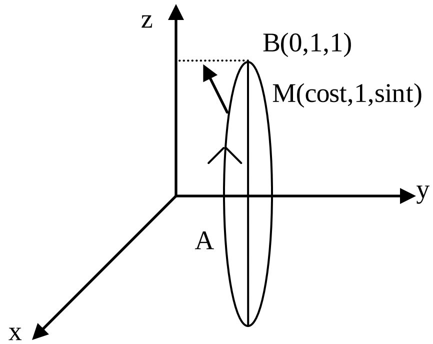


Pentru O(0, 0) obţinem t = 0, iar pentru A(1, 1) obţinem t = 1.

$$L = \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\gamma F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy = \int_\gamma xydx + (x+y)dy =$$

$$= \int_0^1 [t\cdot t^2\cdot 1 + (t+t^2)\cdot 2t]dt = \left(\frac{3}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12}.$$

Exerciţiul 11.2.10. Fie $\vec{F}$ o forţă variabilă având mărimea invers proporţională cu distanţa de la punctul ei de aplicaţie la axa Oz, dirijată după perpendiculara pe această axă şi îndreptată spre ea. Să se determine lucrul mecanic efectuat prin deplasarea unui punct material sub acţiunea acestei forţe pe cercul x = cos t, y = 1, z = sin t din punctul (1, 1, 0) în punctul (0, 1, 1) în sens direct faţă de direcţia pozitivă a axei Oy.



Din datele problemei rezultă:

$$\vec{F}\,(x, y, z) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}(-x\,\vec{i} - y\,\vec{j})$$

Curba pe care se deplasează punctul are ecuaţiile parametrice:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 \\ z = \sin t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}.$$

Lucrul mecanic este:

$$L = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\,\vec{r} = \int_{0}^{\pi/2} \frac{k}{\sqrt{\cos^2 t + 1}}[(-\cos t)\sin t + 1 \cdot 0]dt =$$

$$= k\sqrt{1 + \cos^2 t}\Big|_{0}^{\pi/2} = k(1 - \sqrt{2}).$$

Exercițiul 11.3.12. Să se demonstreze că

$$\vec{V}(x, y) = (2xy + y^2)\cdot \vec{i} + (x^2 + 2xy)\cdot \vec{j}$$

este un câmp de gradienți în $\mathbb{R}^2$ și să se determine un potențial scalar pentru acest câmp.

Soluție. $\mathbb{R}^2$ este o mulțime deschisă și stelată. Dacă $V_1(x, y) = 2xy + y^2$ și $V_2(x, y) = x^2 + 2xy$, atunci $\frac{\partial V_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial V_2}{\partial y}(x,y) = 2x + 2y$, pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, deci $\vec{V}$ este câmp de gradienți.

Un potențial scalar al său este:

$$U(x, y) = \int_0^x V_1(t,0)dt + \int_0^y V_2(x,t)dt =$$

$$= \int_0^x 0dt + \int_0^y (x^2 + 2xt)dt = (x^2 t + xt^2)\Big|_0^y = x^2 y + xy^2$$

Exercițiul 11.3.13. Să se demonstreze că

$$\vec{V}(x, y, z) = y^2 z\cdot \vec{i} + (2xyz + 1)\cdot \vec{j} + xy^2\cdot \vec{k}$$

este un câmp de gradienți în $\mathbb{R}^3$ și să se determine un potențial scalar al său.

Soluție. Cu notațiile obișnuite obținem:

$V_1(x, y, z) = y^2 z$, $V_2(x, y, z) = 2xyz + 1$, $V_3(x, y, z) = xy^2$.

Deoarece $\mathbb{R}^3$ este mulțime deschisă și stelată și

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x} = 2yz;\quad \frac{\partial V_1}{\partial z} = \frac{\partial V_3}{\partial x} = y^2;\quad \frac{\partial V_2}{\partial z} = \frac{\partial V_3}{\partial y} = 2xy$$

rezultă că $\vec{V}$ e câmp de gradienți.

Un potențial scalar al său este :

$$U(x, y, z) = \int_0^x V_1(t,0,0)dt + \int_0^y V_2(x,t,0)dt + \int_0^z V_3(x,y,t)dt =$$

$$= \int_0^x 0dt + \int_0^y 1dt + \int_0^z xy^2 dt = y + xy^2 z$$

Exercițiul 11.3.14. Se consideră câmpul vectorial

$$\vec{V}(x, y, z) = \frac{2x}{x^2+y^2}\cdot \vec{i} + \frac{2y}{x^2+y^2}\cdot \vec{j} + 2z\cdot \vec{k}.$$

Să se demonstreze că $\vec{V}$ este conservativ pe mulțimea deschisă

$$D = \{(x, y, z), x^2 + y^2 \neq 0\}$$

și să se calculeze circulația lui $\vec{V}$ pe cercul γ: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$ parcurs o dată pozitiv în raport cu semiaxa Oz.

Soluție. Avem:

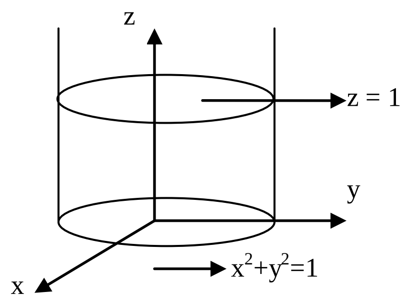
$V_1(x, y, z) = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $V_2(x, y, z) = \frac{2y}{x^2+y^2}$, $V_3(x, y, z) = 2z$.

Deoarece $\dfrac{\partial V_1}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial V_2}{\partial x}(x,y,z) = -\dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$;

$$\frac{\partial V_1}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial V_3}{\partial x}(x,y,z) = 0,$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial V_3}{\partial y}(x,y,z) = 0,$$

$\forall$ $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ cu $x^2 + y^2 > 0$ rezultă că $\vec{V}$ este câmp conservativ pe domeniul său de definiţie, mulţimea $D = \{(x, y, z), x^2 + y^2 \neq 0\}$.



Cercul γ este intersecţia suprafeţei cilindrice de ecuaţie $x^2 + y^2 = 1$ cu planul de ecuaţie $z = 1$. Ecuaţiile sale parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 1, t \in [0, 2\pi] \end{cases}.$$

Circulaţia lui $\vec{V}$ pe γ este $\oint_\gamma \dfrac{2x}{x^2+y^2}dx + \dfrac{2y}{x^2+y^2}dy + 2zdz =$

$$\int_0^{2\pi} [2\cos t(-\sin t) + 2\sin t\cos t + 2\cdot 1\cdot 0]dt = \int_0^{2\pi} 0\cdot dt = 0.$$

Să observăm că teorema 11.1.3.5. nu poate fi aplicată deoarece mulţimea A nu este o mulţime stelată.

Exerciţiul 11.3.15. Să se calculeze lucrul mechanic efectuat de forţa de greutate $\vec{G}$ pentru a deplasa punctul material de masă m din poziţia $A(x_1,y_1,z_1)$ în poziţia $B(x_2,y_2,z_2)$.

Soluţie. $\vec{G}(x, y, z) = -mg\vec{k}$ este un câmp conservativ pe $\mathbb{R}^3$, care este mulţime deschisă şi stelată. Un potenţial scalar al său este

$U(x, y, z) = -mgz$. Lucrul mecanic este:

$$L = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} -mgdz \cdot \vec{G}\cdot d\vec{r} = -mgz\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} = mg(z_1 - z_2)$$

Exerciţiul 11.3.16. Să se determine lucrul mecanic realizat de forţa elastică $\vec{F} = -k^2\vec{r}$, pentru a deplasa un punct material din $A(x_1, y_1, z_1)$ în

$B(x_2, y_2, z_2)$.

Soluţie. $\vec{F}$ (x, y, z) = -k^{2}x$\cdot \vec{i}$ - k^{2}y$\cdot \vec{j}$ - k^{2}z$\cdot \vec{k}$ este un câmp de gradienţi pe $\mathbb{R}^3$ şi un potenţial scalar al său este:

$$U(x, y, z) = \int_0^x -k^2 t dt + \int_0^y -k^2 t dt + \int_0^z -k^2 t dt = -\frac{k^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Atunci L = $\displaystyle\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{k^2}{2}\left(\left(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2\right) - \left(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2\right)\right)$.