12. INTEGRALA DE SUPRAFAŢĂ DE AL DOILEA TIP. CÂMPURI SOLENOIDALE.

12.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale

12.1.1. Suprafeţe orientabile

Considerăm o suprafaţă netedă şi simplă, reprezentată de pânza $S : D \to \mathbb{R}^3$ injectivă, de clasă C^1, cu imaginea (S). Pentru orice punct $M \in (S)$ există şi este unic un punct $(u, v) \in D$, astfel încât $M = S(u, v)$. În punctul M există doi versori normali la (S) şi anume:

$$\frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\left\| \vec{r}_u \times \vec{r}_v \right\|} \text{ şi } -\frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\left\| \vec{r}_u \times \vec{r}_v \right\|}$$

Definiţia 12.1.1.1. Suprafaţa (S) se numeşte *orientabilă* (sau cu două feţe) dacă funcţia care asociază fiecărui punct $M \in (S)$ unul din cei doi versori normali la (S) în punctul M este o funcţie continuă. O suprafaţă orientabilă împreună cu o alegere a unuia din cei doi versori se numeşte suprafaţă *orientată*.

Exemplul 12.1.1.1. Orice suprafaţă netedă definită explicit de ecuaţia
$z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ este orientabilă: dacă alegem în fiecare punct al său sensul normalei, astfel încât aceasta să facă un unghi ascuţit cu sensul pozitiv al axei Oz, spunem că suprafaţa este *orientată pozitiv* sau că alegem *faţa superioară* a suprafeţei, în caz contrar, spunem că suprafaţa este *orientată negativ* sau că alegem *faţa inferioară.*
Exemplul 12.1.1.2. Orice suprafaţă (S) netedă, simplă şi închisă este orientabilă. În acest caz există două domenii D_1, D_2 încât $\mathrm{Fr}\, D_1 = \mathrm{Fr}\, D_2 = (S)$, $D_1 \cup D_2 \cup (S) = \mathbb{R}^3$, D_1 mărginit, D_2 nemărginit. Dacă în fiecare punct al lui (S) alegem sensul normalei îndreptat spre domeniul D_2, obţinem *faţa exterioară* ; dacă în fiecare punct al lui (S) alegem sensul normalei îndreptat spre domeniul D_1, obţinem *faţa interioară*.

Observaţia 12.1.1.1. Dacă $S : D \to \mathbb{R}^3$ şi $S_1 : D_1 \to \mathbb{R}^3$ sunt două pânze netede, simple, nesingulare echivalente şi dacă $T : D \to D_1$, este difeomorfism, astfel încât $S_1 \circ T = S$, cu jacobianul strict pozitiv în fiecare punct, atunci (S) şi (S_1) coincid şi au aceeaşi orientare (versorul normală este independent de reprezentarea parametrică aleasă)

12.1.2. Integrala de suprafaţă de al doilea tip

Definiţia 12.1.2.1. Considerăm o suprafaţă netedă şi orientată, definită parametric prin $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in D$, unde $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact măsurabil şi fie $(S) \subset \mathbb{R}^3$ imaginea sa. Fie $\vec{V}$ un câmp vectorial de componente $V_1, V_2, V_3 : (S) \to \mathbb{R}$. Fie $d = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ o diviziune arbitrară a domeniului D. Fie ξ un sistem arbitrar de "puncte intermediare" $(u_i, v_i) \in D_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, $(x_i, y_i, z_i) \in (S_i)$ unde
$(S_i) = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in D_i\}$. Fie T_i domeniul corespunzător lui (S_i) în planul tangent la (S) în punctul (x_i, y_i, z_i), $i=1, 2, \dots, n$ şi $\vec{n}_i$, versorul normalei la suprafaţă în acest punct. Câmpului vectorial $\vec{V}$, diviziunii d şi sistemului ξ le asociem suma:

$$\sigma_{\vec{V}}(d,\xi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{V}(x_i, y_i, z_i) \cdot \vec{n}_i \right) \cdot aria(T_i)$$

Câmpul vectorial $\vec{V}$ se numeşte *integrabil în raport cu coordonatele pe* (S), dacă există $J_2 \in \mathbb{R}$ încât pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\eta > 0$ astfel încât, oricare ar fi diviziunea d cu $\|d\| < \eta$ şi oricare ar fi sistemul ξ de puncte intermediare, să avem:

$$\left|\sigma_{\vec{V}}(d,\xi)-J_2\right|<\varepsilon$$

Numărul J_2 se numeşte *integrala de suprafaţă de al doilea tip* sau în *raport cu coordonatele* a câmpului vectorial $\vec{V}$ şi se notează

$$J_2 = \iint_S V_1(x,y,z)dydz + V_2(x,y,z)dzdx + V_3(x,y,z)dxdy$$

Observaţia 12.1.2.1. Dacă $\vec{V}$ este *câmpul vectorial al vitezelor* particulelor de fluid care trece printr-o suprafaţă, atunci numărul J_2 reprezintă *fluxul câmpului vectorial* $\vec{V}$ *prin suprafaţa orientată (S)*.

Teorema 12.1.2.1. Considerăm o suprafaţă netedă şi orientată şi $(S)\subset\mathbb{R}^3$ imaginea sa. Dacă $\vec{V}$ este un câmp vectorial având componentele:

V_1, V_2, V_3 : (S) $\to\mathbb{R}$, continue pe (S), atunci $\vec{V}$ este integrabil în raport cu coordonatele şi are loc egalitatea:

$$\iint_S V_1(x,y,z)dydz + V_2(x,y,z)dzdx + V_3(x,y,z)dxdy = \iint_S \vec{V}\cdot\vec{n}\,dS$$

unde $\vec{n}$ este versorul orientat al normalei la (S) în punctul curent.

Observaţia 12.1.2.2. a) Dacă ţinem seama de formula de calcul a integralei de suprafaţă de primul tip şi de faptul că

$$\vec{n} = \frac{A\cdot\vec{i}+B\cdot\vec{j}+C\cdot\vec{k}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

obţinem regula de calcul:

$$\iint_S V_1(x,y,z)dydz + V_2(x,y,z)dzdx + V_3(x,y,z)dxdy = \iint_D \left(\widetilde{V}_1\cdot A+\widetilde{V}_2\cdot B+\widetilde{V}_3\cdot C\right)dudv$$

unde $\widetilde{V}_i(u, v) = V_i(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, i = 1, 2, 3.

Dacă se consideră cealaltă orientare a suprafeţei (S) în membrul drept apare semnul minus.

b) Dacă folosim scrierea vectorială, obţinem:

$$\iint_S V_1(x,y,z)dydz + V_2(x,y,z)dzdx + V_3(x,y,z)dxdy = \iint_S \vec{V}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_S \vec{V}\cdot\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{\left\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right\|}dS =$$

$$\iint_S \frac{\left(\vec{V},\vec{r}_u,\vec{r}_v\right)}{\left\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right\|}dS = \iint_D \left(\vec{V},\vec{r}_u,\vec{r}_v\right)dudv =$$

$$= \iint_D \begin{vmatrix} \widetilde{V}_1 & \widetilde{V}_2 & \widetilde{V}_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} dudv$$

c)Dacă suprafaţa este dată explicit de ecuaţia z = f(x, y), (x, y) $\in$ D, unde $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact măsurabil, atunci versorul normalei corespunzător feţei superioare este:

$$\vec{n} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}},$$

iar versorul normalei corespunzător feţei inferioare este $-\vec{n}$. În practică, fixarea orientării se face în funcţie de context.

d) Din teorema 12.1.2.1. rezultă că integrala de suprafaţă de al doilea tip, ca şi cea de primul tip, este independentă de parametrizarea lui (S), în sensul că pentru două pânze echivalente, cu aceeaşi orientare, valoarea integralei este aceeaşi şi diferă doar prin semn, dacă se schimbă orientarea.

12.1.3. Formule integrale

Formulele integrale stabilesc legături între unele tipuri de integrale considerate anterior şi pot fi folosite pentru a facilita calculul acestora.

Definiţia 12.1.3.1. O mulţime $D \subset \mathbb{R}^2$ se numeşte *domeniu compact elementar* dacă satisface următoarele condiţii:

a) este domeniu compact;
b) este reuniunea unui număr finit de domenii compacte, fără puncte interioare comune, simple în raport cu axa Ox;
c) este reuniunea unui număr finit de domenii compacte, fără puncte interioare comune, simple în raport cu axa Oy;
d) frontiera sa, Fr D, este reuniunea unui număr finit de imagini de curbe plane, netede, nesingulare, simple, închise şi este orientată pozitiv, adică în sensul de deplasare al unui observator pe Fr D, astfel încât să lase domeniul D în stânga.

Teorema 12.1.3.1. *(Formula Green-Riemann)*

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact elementar şi

$\vec{V}(x, y) = V_1(x, y)\cdot\vec{i} + V_2(x, y)\cdot\vec{j}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe o mulţime deschisă ce include pe D. Atunci:

$$\oint_{FrD} \vec{V}\cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) dxdy.$$

Observaţia 12.1.3.1. Dacă $\frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{\partial V_1}{\partial y}$, atunci $\oint_{FrD} \vec{V}\cdot d\vec{r} = 0$.

Teorema 12.1.3.2. Dacă $D \subset \mathbb{R}^2$ este domeniu compact elementar, atunci :

$$\text{aria(D)} = \frac{1}{2}\oint_{FrD} xdy - ydx = \int_{FrD} xdy = \int_{FrD} -ydx$$

Formula Gauss-Ostrogradski este analogul tridimensional al formulei Green-Riemann şi stabileşte o legătură între integrala de suprafaţă şi integrala triplă.

Definiţia 12.1.3.2. Pânza p : [0, 1] x [0, 1] $\to \mathbb{R}^3$ se numeşte *închisă* dacă p(u, 0) = p(u, 1) şi p(0, v) = p(1, v), oricare ar fi (u, v) $\in$ [0, 1] x [0, 1].

Pânza p : D$\to \mathbb{R}^3$, cu $D \subset \mathbb{R}^2$ domeniu compact, se numeşte *închisă* dacă există o bijecţie continuă şi cu inversa continuă φ : [0, 1] x [0, 1] →D, astfel încât pânza p ∘ φ : [0, 1] x [0, 1] $\to \mathbb{R}^3$ să fie închisă, în sensul de mai sus.

Se numeşte *suprafaţă închisă* o suprafaţă reprezentată de o pânză închisă.

Definiţia 12.1.3.3. O mulţime $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ este *domeniu compact elementar* dacă:

a) este domeniu compact;
b) este reuniunea unui număr finit de domenii compacte simple în raport cu axa Ox, fără puncte interioare comune;
c) este reuniunea unui număr finit de domenii compacte simple în raport cu axa Oy, fără puncte interioare comune;
d) este reuniunea unui număr finit de domenii compacte simple în raport cu axa Oz, fără puncte interioare comune;
e) frontiera sa, Fr Ω este reuniunea unui număr finit de imagini de suprafeţe închise şi orientate.

Exemple. Sunt elementare următoarele domenii:

- sfera : $\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \le r^2\}$
- coroana sferică: $\{r_1^2 \le (x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \le r_2^2\}$
- cilindrul: $\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \le r^2, 0 \le z \le h\}$
- elipsoidul: $\left\{(x, y, z): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\right\}$

Observaţia 12.1.3.1. Dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ este un domeniu compact elementar, atunci se poate defini în mod natural versorul normală exterioară în punctul curent din Fr Ω.

Teorema 12.1.3.3. *(Formula lui Gauss-Ostrogradski)*

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact elementar şi

$\vec{V}(x, y, z) = V_1(x, y.z)\cdot \vec{i} + V_2(x, y, z)\cdot \vec{j} + V_3(x, y, z)\cdot \vec{k}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe o mulţime deschisă ce include pe Ω. Atunci fluxul câmpului vectorial $\vec{V}$ prin Fr Ω, după normala exterioară $\vec{n}$ este egal cu integrala divergenţei lui $\vec{V}$ pe Ω, adică:

$$\iint_{Fr\Omega} V_1(x, y, z)dydz + V_2(x, y, z)dzdx + V_3(x, y, z)dxdy =$$

$$= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial V_3}{\partial z}(x, y, z) \right) dxdydz .$$

Observaţia 12.1.3.2. Formula Gauss-Ostrogradski

$$\iint_{Fr\Omega} \left(\vec{V} \cdot \vec{n} \right) ds = \iiint_{\Omega} \left(div \vec{V} \right) dxdydz$$

se mai numeşte şi formula flux-divergenţă, pentru că permite o interpretare fizică a divergenţei unui câmp cu ajutorul fluxului printr-o suprafaţă închisă.

Corolarul 12.1.3.1. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact elementar şi U un câmp scalar de clasă C^1 pe o mulţime deschisă care îl conţine pe Ω. Atunci:

$$\iiint_{\Omega} (gradU) dxdydz = \iint_{Fr\Omega} \vec{n} \cdot U ds$$ (formula integrală a gradientului)

Corolarul 12.1.3.2. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact elementar şi $\vec{V}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe o mulţime deschisă care îl conţine pe Ω. Atunci:

$$\iiint_{\Omega} rot \vec{V} dxdydz = \iint_{Fr\Omega} \left(\vec{n} \times \vec{V} \right) ds$$ (formula integrală a rotorului)

Corolarul 12.1.3.3. Fie G $\subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă şi $(x_0, y_0, z_0) \in G$ arbitrar. Fie $\vec{V}$: $G \to \mathbb{R}^3$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe G şi $U : G \to \mathbb{R}$ un câmp scalar de clasă C^1 pe G.

Fie $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un şir de domenii compacte elementare incluse în G, astfel încât $\lim_{n\to\infty} d(\Omega_n) = 0$ şi $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Atunci:

a) $(\operatorname{div} \vec{V})(x_0, y_0, z_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\operatorname{vol}\Omega_n} \iint_{Fr\Omega_n} \vec{n}\cdot\vec{V}\, ds$

b) $(\operatorname{rot} \vec{V})(x_0, y_0, z_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\operatorname{vol}\Omega_n} \iint_{Fr\Omega_n} \vec{n}\, \mathbf{x}\, \vec{V}\, ds$

c) $(\operatorname{grad} U)(x_0, y_0, z_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\operatorname{vol}\Omega_n} \iint_{Fr\Omega_n} \vec{n}\cdot U ds$

Observaţia 12.1.3.3. Formulele din corolarul 12.1.3.3. arată că divergenţa şi rotorul unui câmp vectorial, precum şi gradientul unui câmp scalar, care au fost definite iniţial folosind axele de coordonate, nu depind de alegerea acestor axe, ci depind de câmp şi de punctul în care se calculează.

Definiţia 12.1.3.4. Fie G $\subset \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă, $f : G \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 şi S suprafaţa definită explicit de ecuaţia z = f(x, y), orientată pozitiv.

Fie $D \subset G$ domeniu compact elementar,
$(S) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ şi
$(C) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z = f(x, y), (x, y) \in Fr\, D\}$, cu orientarea indusă de pe Fr D. Atunci (C) este imaginea unei curbe orientate în $\mathbb{R}^3$ şi se numeşte *bordura orientată* a lui (S).

Observaţia 12.1.3.4. Orientarea curbei (C), indusă de orientarea de pe Fr D se numeşte orientare compatibilă cu orientarea suprafeţei (S).

Orientarea fixată pe bordura (C), compatibilă cu cea a suprafeţei (S) poate fi reprezentată intuitiv astfel: dacă $\vec{\xi}$ este vectorul tangent la curbă în punctul curent şi $\vec{n}$ este vectorul normal la suprafaţă în acelaşi punct, atunci un observator care se deplasează pe (C) în sensul lui $\vec{\xi}$, având capul spre $\vec{n}$, lasă în stânga suprafaţa (S).

Definiţia 12.1.3.5. Fie (S) $\subset \mathbb{R}^3$ imaginea unei suprafeţe date. Dacă (S) este de clasă C^2, orientată, şi se poate descompune într-un număr finit de porţiuni de suprafaţă care pot fi reprezentate prin ecuaţii explicite în raport cu fiecare variabilă, atunci (S) se numeşte *suprafaţă elementară*. În acest caz, *bordura elementară* (C) a lui (S) este imaginea drumului închis obţinut prin juxtapunerea drumurilor care au ca imagine arce de curbă incluse numai în una din bordurile porţiunilor componente.

Teorema 12.1.3.4. *(Formula lui Stokes)*

Fie (S) $\subset \mathbb{R}^3$ o suprafaţă elementară şi (C) bordura sa orientată. Fie $\vec{V}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^3$ care conţine pe (S). Atunci circulaţia lui $\vec{V}$ pe (C) este egală cu fluxul rotorului lui $\vec{V}$ prin (S), adică:

$$\oint_C \vec{V}\cdot d\vec{r} = \iint_S (rot\vec{V})\cdot\vec{n}\, ds$$

Observaţia 12.1.3.5. Din formula lui Stokes rezultă că fluxul rotorului unui câmp vectorial prin două suprafeţe care au aceeaşi bordură este acelaşi.

12.1.4. Caracterizarea câmpurilor solenoidale

Definiţia 12.1.4.1. Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă. Câmpul vectorial $\vec{V}$, de clasă C^1 pe D, se numeşte *solenoidal (fără surse) în D*, dacă div $\vec{V}$ = 0 în D. $\vec{V}$ se numeşte *câmp de rotori (câmp de vârtejuri, câmp rotaţional)* în D, dacă există un câmp vectorial $\vec{W}$, de clasă C^2 în D, încât $\vec{V}$ = rot $\vec{W}$ în D. În acest caz, $\vec{W}$ se numeşte *potenţialul vector al câmpului* $\vec{V}$.

Observaţia 12.1.4.1. Dacă $\vec{V}$ este un câmp de rotori, atunci
div $\vec{V}$ = div(rot $\vec{W}$) = 0, deci $\vec{V}$ este solenoidal. Din formula Gauss-Ostrogradski rezultă că, dacă $\vec{V}$ este solenoidal în D, atunci fluxul lui $\vec{V}$ prin frontiera închisă a oricărui domeniu compact elementar inclus în D este nul, justificând denumirea de "câmpuri fără surse" pentru câmpurile solenoidale.

În teorema următoare se dă o caracterizare completă a câmpurilor solenoidale.

Teorema 12.1.4.1. Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă şi $\vec{V}$ un câmp vectorial de clasă C^1 în D. Următoarele afirmaţii sunt *echivalente*:

(a) $\vec{V}$ este câmp solenoidal în D

(b) $\vec{V}$ este, local, un câmp de rotori (adică, pentru orice $a \in D$, există r > 0 şi un câmp vectorial $\vec{W}$, de clasă C^2 în sfera $S(a, r) \subset D$, încât $\vec{V}$ = rot$\vec{W}$ în S(a, r))

(c) fluxul lui $\vec{V}$ prin frontiera închisă a oricărui domeniu compact elementar inclus în D este nul.

Observaţia 12.1.4.2. Pentru a determina un potenţial vector $\vec{W}$, al câmpului $\vec{V}$ se procedează astfel: se consideră $\vec{W}$ de forma:

$$\vec{W}(x, y, z)=W_1(x, y, z)\cdot \vec{i} + W_2(x, y, z)\cdot \vec{j},\ (x, y, z) \in S(a, r), a=(x_0, y_0, z_0)$$

Din condiţia rot $\vec{W} = \vec{V}$ se obţine:

$$\frac{\partial W_1}{\partial z} = V_2,\ \frac{\partial W_2}{\partial z} = -V_1,\ \frac{\partial W_2}{\partial x} - \frac{\partial W_1}{\partial y} = V_3$$

unde V_1, V_2, V_3 sunt componentele lui $\vec{V}$.

Din primele două egalităţi rezultă că, pentru orice $(x, y, z) \in S(a, r)$ avem:

$$W_1(x, y, z) = \int_{z_0}^{z} V_2(x, y, t)dt + \varphi_1(x, y)$$

$$W_2(x, y, z) = -\int_{z_0}^{z} V_1(x, y, t)dt + \varphi_2(x, y)$$

unde φ_1, φ_2 sunt funcţii de clasă C^2.

Ţinând seama că div $\vec{V} = 0$, ultima egalitate devine:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = V_3(x, y, z_0)$$

Este evident că există funcţii φ_1, φ_2, satisfăcând această egalitate. Cunoaşterea unui potenţial vector, particular este suficientă pentru găsirea oricărui alt potenţial vector, dacă mulţimea D este *deschisă şi stelată*. În cest caz două câmpuri vectoriale $\vec{W}_1$ şi $\vec{W}_2$ cu proprietatea că rot $\vec{W}_1 = \vec{V}$ şi rot $\vec{W}_2 = \vec{V}$ diferă printr-un câmp de gradienţi.

Observaţia 12.1.4.3. În condiţiile formulei lui Stokes, fluxul unui câmp solenoidal $\vec{V}$ poate fi exprimat prin circulaţia unui potenţial vector $\vec{W}$ al lui $\vec{V}$ şi anume:

$$\iint_S \vec{V} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_S (rot \vec{W}) \cdot \vec{n}\, dS = \int_C \vec{W} \cdot d\vec{r}$$

unde (C) este bordura orientată a lui (S).