4. FUNCŢII DIFERENŢIABILE. EXTREME LOCALE.

4.2. Exerciţii rezolvate.

Exerciţiul 4.2.1. Să se demonstreze că funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} \sin^2 x, x < 0 \\ x^2, \quad x \geq 0 \end{cases}$ este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}$ şi să se determine diferenţiala sa.

Soluţie. Funcţia f este evident, derivabilă în orice $x \neq 0$, $f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x$ dacă $x < 0$ şi $f'(x) = 2x$ dacă $x > 0$. Deoarece f este continuă în $x = 0$ aplicând o consecinţă a teoremei lui Lagrange, rezultă că $f'_s(0) = \lim\limits_{x \uparrow 0} f'(x) = 0$ şi $f'_d(0) = \lim\limits_{x \downarrow 0} f'(x) = 0$, deci f este derivabilă în $x = 0$ şi $f'(0) = 0$.

Prin urmare f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, deci este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}$, iar diferenţiala sa este funcţia $df: \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ care asociază fiecărui $x \in \mathbb{R}$ funcţia liniară şi continuă

$$df_x: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ df_x(h) = f'(x) \cdot h = \begin{cases} h \cdot \sin 2x, x < 0 \\ 2x \cdot h \quad, x \geq 0 \end{cases}.$$

Exerciţiul 4.2.2. Să se demonstreze că funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ unde $f_1(x) = \sin x$,

$$f_2(x) = \begin{cases} -x^2,\ x \leq 0 \\ x^2 e^{-x}, x > 0 \end{cases},\ f_3(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0 \qquad, x = 0 \end{cases}$$

este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}$ şi să se determine diferenţiala sa.

Soluţie. Demonstrăm că funcţiile f_1, f_2, f_3 sunt diferenţiabile pe $\mathbb{R}$.

Evident, f_1 este derivabilă pe $\mathbb{R}$, deci este şi diferenţiabilă, iar diferenţiala sa este $df_1: \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $df_{1x}(h) = f'_1(x) \cdot h = h \cdot \cos x$.

Funcţia f_2 este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ şi

$$f'_2(x) = \begin{cases} -2x \qquad, x < 0 \\ x(2-x)e^{-x}, x > 0 \end{cases}$$

Deoarece $\lim\limits_{x \uparrow 0} f'_2(x) = \lim\limits_{x \downarrow 0} f'_2(x) = 0$ şi f este continuă în 0, deducem că f este derivabilă în 0 şi $f'_2(0) = 0$. Prin urmare, f_2 este derivabilă pe $\mathbb{R}$, deci este şi diferenţiabilă pe $\mathbb{R}$ şi diferenţiala sa este funcţia $df_2: \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ care asociază fiecărui $x \in \mathbb{R}$ funcţia

$$df_{2x}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ df_{2x}(h) = \begin{cases} -2xh \qquad, x \leq 0 \\ x(2-x)e^{-x}h, x > 0 \end{cases}$$

Componenta f_3 este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dar nu se poate aplica consecinţa teoremei lui Lagrange pentru studiul derivabilităţii în $x = 0$ deoarece derivata f'_3 nu are limită în $x = 0$ ($\cos \dfrac{1}{x}$ nu are limită în $x = 0$). Cu definiţia, obţinem $f'_3(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f_3(x) - f_3(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$, deci f_3 este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi

$$f'_3(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0 \qquad, x = 0 \end{cases}.$$

Rezultă că f_3 este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}$ şi diferenţiala sa este funcţia df_3: $\mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ care asociază fiecărui $x \in \mathbb{R}$ funcţia $df_{3x}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $df_{3x}(h) = \begin{cases} (2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x})h, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Prin urmare funcţia f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ dată este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}$ şi diferenţiala sa este funcţia $df: \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ care asociază fiecărui $x \in \mathbb{R}$ funcţia $df_x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,
$df_x(h) = (f'_1(x)h, f_2(x)h, f'_3(x)h)$.

Exerciţiul 4.2.3. Să se demonstreze că funcţia f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + xy^2$ este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$ şi să se determine diferenţiala sa.

Soluţie. Evident, funcţiile $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, date de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy$ sunt continue pe $\mathbb{R}^2$ şi diferenţiala sa este funcţia
df: $\mathbb{R}^2 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ care asociază fiecărui punct $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ funcţia liniară şi continuă $df_{(x, y)}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $df_{(x, y)}(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)h_2$ adică

$$df_{(x,y)}(h_1, h_2) = (3x^2 + y^2)\cdot h_1 + 2xy\cdot h_2$$

Exerciţiul 4.2.4. Să se demonstreze că funcţia f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$ şi să se determine diferenţiala sa.

Soluţie. Funcţia f are derivate parţiale pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, fiind compunere de funcţii derivabile. Folosind regulile de derivare uzuale obţinem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} +$$

$$+(x^2 + y^2)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) =$$

$$= 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + (x^2 + y^2)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\left(-\frac{1}{x^2 + y^2}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \cos\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

pentru orice $(x, y) \neq (0, 0)$.

Analog $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ pentru orice $(x, y) \neq (0, 0)$.

Cu definiţia, obţinem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(h_1,0) - f(0,0)}{h_1} = \lim_{h_1 \to 0} h_1 \sin\frac{1}{|h_1|} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h_2 \to 0} \frac{f(0,h_2) - f(0,0)}{h_2} = \lim_{h_2 \to 0} h_2 \sin\frac{1}{|h_2|} = 0$$

Prin urmare, f este derivabilă parţial pe $\mathbb{R}^2$, derivatele parţiale fiind $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Funcţiile $\frac{\partial f}{\partial x}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, fiind compuneri de funcţii elementare. Prin urmare funcţia f este diferenţiabilă pe mulţimea $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ şi diferenţiala sa este funcţia df: $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ care asociază fiecărui punct $(x, y) \neq (0, 0)$ funcţia liniară şi continuă

$df_{(x,\, y)}$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $df_{(x,\, y)}(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot h_2$.

Pentru studiul diferenţiabilităţii funcţiei f în $(0, 0)$ teorema 4.1.3.2. nu mai este aplicabilă, deoarece $\frac{\partial f}{\partial x}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}$ nu sunt continue în $(0, 0)$ (pentru $x_n = y_n = \frac{1}{2n\pi\sqrt{2}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ avem evident $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0, 0)$ şi $\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$).

De aceea, pentru studiul diferenţiabilităţii în $(0, 0)$ procedăm astfel: considerăm funcţia liniară şi continuă

$$L_{(0,0)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ L_{(0,0)}(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2 = 0$$

Pentru $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ avem

$$R(h) = \frac{|f(h_1,h_2) - f(0,0) - L_{(0,0)}(h_1,h_2)|}{\|h\|} =$$

$$= \frac{(h_1^2+h_2^2)\left|\sin\frac{1}{\sqrt{(h_1^2+h_2^2)}}\right|}{\sqrt{(h_1^2+h_2^2)}} = \sqrt{(h_1^2+h_2^2)}\left|\sin\frac{1}{\sqrt{(h_1^2+h_2^2)}}\right|$$

Deoarece $\lim\limits_{\|h\|\to 0} R(h) = 0$, deducem că f este diferenţiabilă în $(0, 0)$ şi $df_{(0, 0)} = L_{(0, 0)}$.

Prin urmare f este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$ şi diferenţiala sa este funcţia $df: \mathbb{R}^2 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ dată de $df_{(x, y)}(h_1, h_2) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)h_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)h_2$.

Exerciţiul 4.2.5. Să se demonstreze că funcţia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (xy, y\sin x, x + y)$ este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$ şi să se determine diferenţiala sa.

Soluţie. Componentele funcţiei f sunt funcţii de clasă C^1 pe $\mathbb{R}$, deci diferenţiabile pe $\mathbb{R}^2$.

Dacă $f_1(x, y) = xy$, $f_2(x, y) = y \sin x$, $f_3(x, y) = x + y$, funcţiile $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = y$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = x$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = y \cos x$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = \sin x$, $\dfrac{\partial f_3}{\partial x}(x, y) = 1$, $\dfrac{\partial f_3}{\partial y}(x, y) = 1$ sunt continue pe $\mathbb{R}^2$. Matricea jacobiană a funcţiei f este

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ y\cos x & \sin x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ pentru } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Diferenţiala funcţiei f este funcţia $df : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ care asociază fiecărui punct $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ funcţia liniară şi continuă $df_{(x, y)}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, dată de

$$df_{(x, y)}(h_1, h_2) = J_f(x, y)\cdot\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yh_1 + xh_2 \\ (y\cos x)h_1 + (\sin x)h_2 \\ h_1 + h_2 \end{pmatrix}$$

Exerciţiul 4.2.6. Să se determine dz dacă $z(x, y) = f\left(\dfrac{x}{y}, xy\right)$, unde $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^1 pe A.

Soluţie. Notând cu u, v variabilele funcţiei f şi folosind regulile de derivare parţială a funcţiilor compuse, obţinem

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, xy\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, xy\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(xy) =$$

$$= \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, xy\right) + y\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, xy\right) \text{ pentru } y \neq 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, xy\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, xy\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(xy) =$$

$$= -\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, xy\right) + x\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, xy\right) \text{ pentru } y \neq 0$$

Deoarece $\frac{\partial f}{\partial u}$ şi $\frac{\partial f}{\partial v}$ sunt continue, rezultă imediat că $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$ sunt continue în orice punct (x, y) cu $y \neq 0$ şi $dz_{(x, y)}(h_1, h_2) = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y)\cdot h_1 + \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)\cdot h_2 = \left[\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, xy\right) + y\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, xy\right)\right]\cdot h_1$ +

$+\left[-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, xy\right) + x\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, xy\right)\right]\cdot h_2$ pentru orice $y \neq 0$, $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.

Exerciţiul 4.2.7. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, (x, y) \neq (0,0) \\ 0 \qquad\qquad\quad, (x, y) = (0,0) \end{cases}$.

Demonstraţi că $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Soluţie. Prin calcul direct rezultă:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, (x, y) \neq (0,0) \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad, (x, y) = (0,0) \end{cases} \text{ şi}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, (x, y) \neq (0,0) \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad, (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

Atunci:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0, 0) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = 1 \text{ şi}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0, 0) = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = -1$ de unde rezultă că $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Exerciţiul 4.2.8. Să se determine punctele de extrem local pentru funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

Soluţie. Deoarece f este de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^3$, rezultă că toate punctele de extrem local se află printre punctele staţionare ale lui f. Rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x - y + 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y - x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

se obţine un singur punct staţionar : $\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right)$.

Hessiana funcţiei *f* este aceeaşi în fiecare punct din $\mathbb{R}^3$.

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

deci $H_f\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calculând determinanţii principali obţinem $\Delta_1=2>0$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$ şi $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0$.

Deducem că punctul staţionar $\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right)$ este punct de minim local pentru funcţia *f*.

Exerciţiul 4.2.9. Să se determine punctele de extrem local pentru funcţia
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 - 2xy - 4yz + 20x$.

Soluţie. În acest caz $D = D_1 = \mathbb{R}^3$. Funcţia *f* fiind de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^3$, toate punctele de extrem local pentru *f* se află printre punctele staţionare ale lui *f*.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x - 2y + 20 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y - 2x - 4z = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{15}{2} \\ y = \frac{5}{2} \\ z = 5 \end{cases}$$

Prin urmare funcţia *f* are un singur punct staţionar $\left(-\frac{15}{2},\frac{5}{2},5\right)$. Deoarece derivatele parţiale de ordinul doi sunt constante, hessiana funcţiei *f* este aceeaşi în orice punct din $\mathbb{R}^3$.

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Valorile proprii se obţin rezolvând ecuaţia:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 2-\lambda & -4 \\ 0 & -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Rezultă $(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda - 16) = 0$. Se obţine $\lambda_1 = 2 > 0$, $\lambda_2 = 2(1 + \sqrt{5}) > 0$,

$\lambda_3 = 2(1 - \sqrt{5}) < 0$.

Prin urmare punctul $\left(-\frac{15}{2}, \frac{5}{2}, 5\right)$ este punct staţionar pentru *f*, dar nu este punct de extrem local pentru această funcţie. Având în vedere că orice punct de extrem local trebuie să fie punct staţionar deducem că *f* nu are puncte de extrem local.

Exerciţiul 4.2.10. Să se determine punctele de extrem local pentru funcţia
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3y^2(6 - x - y)$.

Soluţie. Funcţia *f* este de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^2$ şi are o infinitate de puncte staţionare.

Într-adevăr, rezolvând sistemul $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$ adică

$$\begin{cases} 18x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = 0 \\ 12x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2 = 0 \end{cases}$$

se obţin următoarele puncte staţionare: $(\alpha, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$; $(0, \beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$; $(3, 2)$.

Derivatele parţiale de ordinul doi sunt :

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 36xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 36x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12x^3 - 2x^4 - 6x^3y$.

Se obţin următoarele matrici hessiene:

$H(\alpha, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12\alpha^3 - 2\alpha^4 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$H(0, \beta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\beta \in \mathbb{R}$ şi $H(3, 2) = \begin{pmatrix} -144 & -108 \\ -108 & -162 \end{pmatrix}$.

Punctul (3, 2) este punct de maxim local pentru *f* deoarece $\Delta_1 = -144 < 0$, $\Delta_2 = 2^4 \cdot 3^6 > 0$. Pentru a decide natura celorlalte puncte staţionare nu se poate folosi teorema 4.1.3.6. Deoarece aplicarea formulei Taylor este anevoioasă (primele derivate nenule în (0, 0) sunt de ordinul 5), studiem direct semnul creşterilor $f(x, y) - f(\alpha, 0)$ şi $f(x, y) - f(0, \beta)$.

Evident, $sgn[f(x, y) - f(\alpha, 0)] = sgn[x(6 - x - y)]$.

Dacă $\alpha < 0$ atunci există $V_1 \in \mathcal{V}(\alpha, 0)$ astfel încât $f(x, y) - f(\alpha, 0) < 0$ pentru orice $(x, y) \in V_1$ deci orice punct $(\alpha, 0)$ cu $\alpha < 0$ este punct de maxim local pentru *f*.

Dacă $\alpha = 0$ există $V_2 \in \mathcal{V}(0, 0)$ astfel încât $6 - x - y > 0$ pentru orice $(x, y) \in V_2$, deci pentru orice $(x, y) \in V_2$, $sgn[f(x, y) - f(\alpha, 0)] = sgn(x)$.

Este evident că $f(x, y) - f(\alpha, 0)$ nu păstrează semn constant pe nici o vecinătate a lui (0, 0) ceea ce arată că (0, 0) nu este punct de extrem pentru *f*.

Dacă $0 < \alpha < 6$, există $V_3 \in \mathcal{V}(\alpha, 0)$ astfel încât $f(x, y) - f(\alpha, 0) > 0$ pentru orice $(x, y) \in V_3$, deci orice punct $(\alpha, 0)$ cu $\alpha \in (0, 6)$ este punct de minim local pentru *f*.

Punctul *(6, 0)* nu este punct de extrem local pentru *f*. Într-adevăr, există $V_4 \in \mathcal{V}(6, 0)$ conţinută în întregime în semiplanul $x > 0$. Pentru orice $(x, y) \in V_4$, $sgn[f(x, y) - f(6, 0)] = sgn(6 - x - y)$. Este evident acum că
$f(x, y) - f(6, 0)$ nu păstrează semn constant în nici o vecinătate a punctului
(6, 0).

Dacă $\alpha > 6$, există $V_5 \in \mathcal{V}(\alpha, 0)$ astfel încât pentru orice $(x, y) \in V_5$ să avem $f(x, y) - f(\alpha, 0) < 0$ ceea ce arată că orice punct $(\alpha, 0)$ cu $\alpha > 6$ este punct de maxim local pentru f.

Analizăm la fel punctele $(0, \beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Deoarece $sgn[f(x, y) - f(0, \beta)] = sgn[x(6 - x - y)]$ şi orice vecinătate a punctului $(0, \beta)$ intersectează atât semiplanul $x < 0$ cât şi semiplanul $x > 0$ rezultă că $f(x, y) - f(0, \beta)$nu are semn constant pe nici o vecinătate a nici unui punct $(0, \beta)$, deci nici un punct $(0, \beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$ nu este punct de extrem local pentru f.

Exerciţiul 4.2.11. Să se determine punctele de extrem local pentru funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = ln(1 + |x - y|)$.

Soluţie. Funcţia are derivate parţiale pe mulţimea $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$ şi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + x - y}, & x > y \\ \dfrac{-1}{1 + y - x}, & x < y \end{cases} ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{-1}{1 + x - y}, & x > y \\ \dfrac{1}{1 + y - x}, & x < y \end{cases}$$

Deoarece rapoartele: $R_1(x) = \dfrac{f(x, \alpha) - f(\alpha, \alpha)}{x - \alpha}$ şi

$R_2(x) = \dfrac{f(\alpha, y) - f(\alpha, \alpha)}{y - \alpha}$ nu au limită în punctul α, rezultă că f nu este derivabilă parţial nici în raport cu x, nici în raport y, în punctul (α, α), $\alpha \in \mathbb{R}$.

Este evident că funcţia f nu are puncte staţionare.

Deoarece $f(x, y) - f(\alpha, \alpha) = f(x, y) = ln(1 + |x - y|) \geq ln\ 1 = 0$, pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ rezultă (α, α) este punct de minim local şi global pentru f.

Prin urmare această funcţie are o infinitate de puncte de minim, nici un punct de maxim, nici un punct staţionar.

Exerciţiul 4.3.12. Să se demonstreze că originea este punct de minim global pentru funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{y^2}\right), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}.$$

Soluţie. Deoarece $f(x, y) - f(0, 0) = y^2 ln\left(1 + \dfrac{x^2}{y^2}\right) \geq 0$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ rezultă că $(0, 0)$ este punct de extrem global şi local pentru f. Nici în acest caz teorema 4.1.3.6. nu poate fi aplicată.