8. INTEGRALA CURBILINIE DE PRIMUL TIP

8.3. Exerciţii propuse

Exerciţiul 8.3.1. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de primul tip:

a) $\int_\gamma xydl$; γ : [0, 1] →$\mathbb{R}^2$, γ(t) = (t, 1 - t);

b) $\int_\gamma (x + y^2)dl$; γ : [0, π] →$\mathbb{R}^2$, γ(t) = (cos t, sin t);

c) $\int_\gamma 4x^6 ydl$; γ : [0, 2] →$\mathbb{R}^2$, γ(t) = (e^t, e^{-t});

d) $\int_\gamma y^2 dl$; γ : [0, 2π] →$\mathbb{R}^2$, γ(t) = (t - sin t, 1 - cos t);

e) $\int_\gamma \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$; γ este segmentul de dreaptă ce uneşte punctele O(0, 0) şi A(1, 2);

f) $\int_\gamma xydl$; γ este porţiunea din eclipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, situată în cadranul I;

g) $\int_\gamma | xy | dl$; γ este cercul $x^2 + y^2 = 1$;

h) $\int_\gamma xy^3 dl$; γ este porţiunea astroidei $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ situată în cadranele I şi IV;

i) $\int_\gamma 2y^2 dl$; γ : y = e^x, x ∈ [0, 1];

j) $\int_\gamma (x + y^2)dl$; γ este pătratul cu vârfurile în A(a, a), B(-a, a), C(-a, -a), D(a, -a).

R. a) $\frac{\sqrt{2}}{6}$; b) $\frac{\pi}{2}$; c) $\frac{2}{3}\left(\sqrt{(e^8 + 1)^3} - \sqrt{2^3}\right)$; d) $\frac{256}{15}$; e) $\ln\frac{\sqrt{5} + 3}{2}$; f) $\frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)}$; g) 2; h) 0; i) $\frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(e^2 + 1\right)^3} - \sqrt{2^3}\right)$; j) $\frac{16a^3}{3}$.

Exerciţiul 8.3.2. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de primul tip:

a) $\int_\gamma z(x^2 + y^2)dl$, γ : [0, 1] →$\mathbb{R}^3$, γ(t) = (tcos t, tsin t, t);

b) $\int_\gamma (x^2 + y^2)\ln zdl$, γ : [0, 1] →$\mathbb{R}^3$, γ(t) = (e^t cos t, e^t sin t, e^t);

c) $\int_\gamma (x^2 - y^2 + z^2)dl$, γ este juxtapunerea curbelor

$\gamma_1 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma_1(t)$ = (Rcos t, Rsin t, 0) şi

γ_2 : [0, R] →$\mathbb{R}^3$, $\gamma_1(t)$ = (0, R - t, t);

d) $\int_\gamma \sqrt{y^2+\frac{z^2}{2}}dl$, γ este curba de ecuaţie $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x+y=0 \end{cases}$;

e) $\int_\gamma \frac{dl}{\sqrt{1+2(2z-z^2)}}$, γ este curba de ecuaţie $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x+y-z=0 \end{cases}$;

f) $\int_\gamma (x+yz)dl$, γ : $\begin{cases} y=x^2 \\ z=x^3, x\in[-1,1] \end{cases}$;

g) $\int_\gamma (x^2-y^2)dl$, γ este curba de ecuaţie $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=0, x\geq 0, z\geq 0 \end{cases}$

R. a) $\frac{-\sqrt{3}}{5}+\frac{8\sqrt{2}}{15}$; b) $\frac{1+2e^3}{3\sqrt{3}}$; c) $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)R^3$; d) $4\pi\sqrt{2}$;

e) $\pi\sqrt{2}$; f) 0; g) $\frac{2}{3}\left(\sqrt{2^3}-\sqrt{3^3}\right)$.

Indicaţii. d) ecuaţiile parametrice sunt x = $\sqrt{2}$ sinθ,
y = - $\sqrt{2}$ sinθ, z = 2cosθ, θ∈[0, 2π];

e) Ecuaţiile parametrice sunt: x = $\frac{1}{2}\sin 2\theta+\cos^2\theta$,

y = $\frac{1}{2}\sin 2\theta+\sin^2\theta$, z = 1 + $\sin 2\theta$, θ∈$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$;

g) Ecuaţiile parametrice sunt: x = cos θ, y = sin θ, z = sin θ – cos θ,
θ∈$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

Exerciţiul 8.3.3. Să se calculeze lungimile următoarelor curbe:

a) x = ae^{kt}cos t, y = ae^{kt}sin t, z = ae^{kt}, t∈[0, 1], a > 0, k > 0.

b) x = tg t, y = ctg t, z = $\sqrt{2}$ ln tg t, t∈$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$;

c) x = t, y = ln sin t, t ∈ $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$;

d) y = arcsin e^{-x}; x∈[0, 1];

e) y = $\frac{1}{2}x^2$; x∈[0, 1];

f) r = a $\sin^3\frac{\theta}{3}$; θ∈[0, 2π];

g) θ = $\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$, r∈[1, 3];

h) r = |sin θ|, θ ∈[0, 2π];

i) x = a(2cos t – cos 2t), y = a(2sin t – sin 2t), t∈[0, 2π].

R. a) $\frac{a}{k}\sqrt{1+2k^2}(e^k-1)$; b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; c) 2ln(1+$\sqrt{2}$);

d) $\ln(e+\sqrt{e^2-1})$; e) $\dfrac{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}{2}$; f) $\dfrac{a}{8}(8\pi-3\sqrt{3})$;

g) $2+\dfrac{1}{2}\ln 3$; h) 2π; i) $16a$.

Exercițiul 8.3.4. Să se calculeze masa segmentului elipsei $x = a\cos t$,
$y = b\sin t$, cu $b > a > 0$, situat în primul cadran, dacă densitatea în fiecare punct este egală cu ordonata punctului.

R. $\dfrac{a^2 b}{2\sqrt{b^2-a^2}}\ln\dfrac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}+\dfrac{b^2}{2}$.

Exercițiul 8.3.5. Să se calculeze masa primei spirale a elicei $x = a\cos t$,
$y = a\sin t$, $z = bt$ (cu $a, b > 0$) a cărei densitate în fiecare punct este egală cu pătratul razei polare a punctului.

R. $\dfrac{2\pi}{3}\sqrt{a^2+b^2}(3a^2+4\pi^2 b^2)$.

Exercițiul 8.3.6. Să se găsească masa arcului $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$,
$z = e^t$, $t \in [0, 1]$ dacă densitatea în fiecare punct este invers proporțională cu pătratul razei polare a punctului şi este egală cu unitatea în punctul
(1, 0, 1).

R. $\sqrt{3}(1-\dfrac{1}{e})$.

Exercițiul 8.3.7. Să se calculeze masa arcului $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$,
$t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, omogen cu densitatea 1.

R. $\dfrac{3a}{2}$

Exercițiul 8.3.8. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al firului material $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$ dacă $\rho(x, y) = \sqrt{y}$.

R. $x_G = \pi$, $y_G = \dfrac{3}{2}$.

Exercițiul 8.3.9. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al firului material $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ dacă $\rho(x, y) = 1$.

R. $x_G = y_G = \dfrac{4}{5}$.

Exercițiul 8.3.10. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al firului $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2t$, $t \in [0, 2\pi]$ dacă $\rho(x, y, z) = 1$.
R. $x_G = y_G = 0$, $z_G = 2\pi$
Exercițiul 8.3.11. Să se calculeze momentul de inerție față de axa Oz al firului $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$, $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$, având densitatea constantă ρ.

R. $I_z = \dfrac{\rho\sqrt{3}}{3}(e^{\pi} - 1)$

Exercițiul 8.3.12. Să se determine momentele de inerție față de axele de coordonate ale firului material $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ având densitatea $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

R. $I_z = \dfrac{\sqrt{2}\pi}{24}(12 + \pi^2)$, $I_y = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{160}(20 + 10\pi + \pi^4)$,

$I_x = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{160}(60 + 10\pi + \pi^4)$.

Exercițiul 8.3.13. Să se determine atracția exercitată de un semicerc omogen asupra unității de masă plasată în centrul său.

R. $F_x = 0$, $F_y = 2\rho \cdot k$.